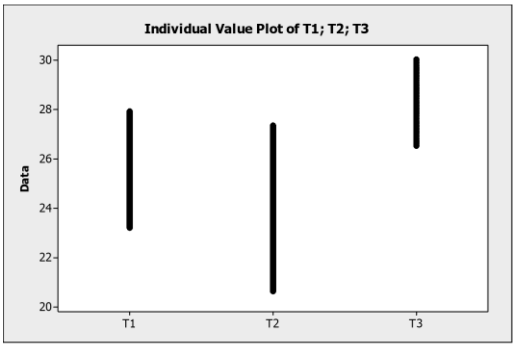
Capitolo Sesto
Soluzione agli esercizi proposti

Esercizi relativi al capitolo 1

1. $t=\left(5.43\cdot 10^{-4}\pm 0.12\cdot 10^{-4}\right)s=\left(543\pm 12\right)\mu s$;
   $L=\left(2.37\pm 0.60\right)m=\left(237\pm 60\right)cm$; $\quad R=\left(1568\pm 8\right)\Omega$.

2. $T_1\in\left(23.21\div 27.91\right)K$; $T_2\in\left(20.63\div 27.33\right)K$; $T_3\in\left(26.51\div 30.03\right)K$
   Le tre misure sono compatibili una con l'altra e anche mutuamente compatibili come si evince dal grafico seguente:



3. $t=\left(543\,\mu s\pm 0{,}02\right)=\left(543\,\mu s\pm 2.21\%\right)$
4. $L=\left(237\,cm\pm 0.25\right)=\left(237\,cm\pm 25.32\%\right)$;
   $R=\left(1568\,\Omega\pm 0.06\right)=R=\left(1568\,\Omega\pm 0.51\%\right)$;
   $T_1=\left(25.56K\pm 9.19\%\right)$; $T_2=\left(23.98K\pm 13.97\%\right)$;
   $T_3=\left(28.27K\pm 6.23\%\right)$

4. Si chiede di determinare quale tra tre multimetri è il più accurato, note le caratteristiche, il valore di una lettura e le condizioni ambientali. L'accuratezza del primo strumento è legata al valore letto e al count, che può essere subito individuato guardando il display dello strumento.

$$a_1 = \pm[0{,}05\%\ V_l + 1(0{,}1)] = 0{,}15V$$

L'accuratezza del secondo strumento è anch'essa legata al valore letto e al fondo scala noto.

$$a_2 = \pm\left[0{,}05\%\ V_l + 0{,}05\% V_{fs}\right] = 0{,}14995V$$

L'accuratezza del terzo strumento, oltre che alla lettura è legata ad un offset.

$$a_3 = \pm[0{,}05\%\ V_l + 80mV] = 0{,}13V$$

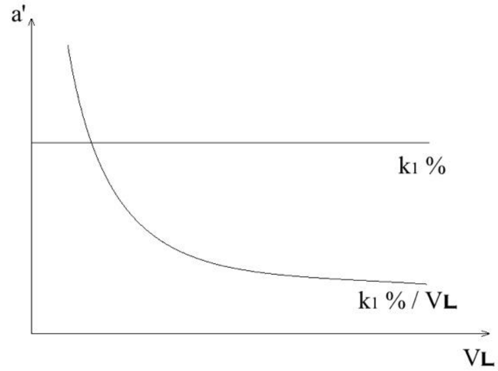
In questa prima fase la temperatura alla quale viene eseguita la misura rientra nel range per il quale sono indicate le suddette accuratezze. Ipotizzando una distribuzione normale standardizzata dei valori si possono ricavare le incertezze.

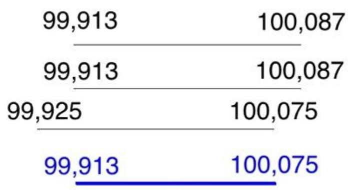
$$u_1 = \frac{a_1}{\sqrt{3}} \cong 0{,}087V$$
$$u_2 = \frac{a_2}{\sqrt{3}} \cong 0{,}087V$$
$$u_3 = \frac{a_3}{\sqrt{3}} \cong 0{,}075V$$

Il terzo strumento risulta essere il migliore.
In una seconda fase si chiede cosa potrebbe accadere in caso tali misure fossero fatte ad un temperatura più altra, fuori dal range indicato per le accuratezza date. Sicuramente i risultati cambierebbero ma per sapere in che modo occorrerebbe conoscere che tipo di incertezza porta ogni strumento per ogni grado centigrado al di fuori dell'intervallo suddetto. Tale incertezza verrà espressa con differenti valori che costituiranno un nuova espressione analitica dell'accuratezza.
Per stabilire le relazioni esistenti tra le incertezza relative occorre riferirsi al grafico seguente, dove

$$a' = \pm\left(k_1\% + \frac{k_1}{V_l}\right)$$

ad ulteriore conferma del fatto che è sempre opportuno che il misurando sia quanto più possibile vicino al valore di fondo scala.





Esercizi relativi al capitolo 2

1. Per dimostrare la (2.12) possiamo usare la (2.11) e avremo:

$$E\{aM+b\}=\int_{-\infty}^{\infty}(aM+b)f_M(m)\,dm=$$

$$=a\int_{-\infty}^{\infty}M\,f_M(m)\,dm+b\int_{-\infty}^{\infty}f_M(m)\,dm=a\,E\{M\}+b$$

Per dimostrare la (2.20) possiamo usare la (2.12) e avremo:

$$Var\{aM+b\}=E\left\{\left(aM+b-\left[E(aM+b)\right]\right)^2\right\}=E\left\{a^2\left[M-E(M)\right]^2\right\}=$$

$$=a^2E\left\{\left[M-E(M)\right]^2\right\}=a^2Var\{M\}$$

Per dimostrare la (2.22), applichiamo la (2.16) ad una generica variabile aleatoria X :

$$Var\{X\} = E\{[X - E\{X\}]^2\} = E\{X^2 - 2XE\{X\} + E^2\{X\}\} =$$
$$= E\{X^2\} - E^2\{X\}$$

Nel caso di 2 variabili aleatorie indipendenti risulta:

$$Var\{M_1M_2\} = E\{M_1^2M_2^2\} - E^2\{M_1M_2\} = E\{M_1^2\}E\{M_2^2\} - E^2\{M_1\}E^2\{M_2\} =$$
$$= [E^2\{M_1\} + Var\{M_1\}][E^2\{M_2\} + Var\{M_2\}] - E^2\{M_1\}E^2\{M_2\} =$$
$$= E^2\{M_1\}E^2\{M_2\} + E^2\{M_1\}Var\{M_2\} + E^2\{M_2\}Var\{M_1\} +$$
$$+ Var\{M_2\}Var\{M_1\} - E^2\{M_1\}E^2\{M_2\} =$$
$$= E^2\{M_1\}Var\{M_2\} + E^2\{M_2\}Var\{M_1\} + Var\{M_2\}Var\{M_1\}$$

2. Per dimostrare che tra tutti gli scarti al quadrato, quello rispetto al valor medio è il più piccolo, avremo che:

$$E\{(M-a)^2\} = E\{(M - \mu + \mu - a)^2\} =$$
$$= E\{(M-\mu)^2\} + E\{(\mu - a)^2\} + 2E\{(M-\mu)\}E\{(\mu-a)\} =$$
$$= Var\{M\} + (\mu - a)^2 \geq Var\{M\}$$

3. Per dimostrare le espressioni (2.28) avremo che:

$$E\{M\} = \int_a^b m \frac{1}{m_{max} - m_{min}} dm = \frac{1}{m_{max} - m_{min}} \left(\frac{m^2}{2} \right) \Bigg|_{m_{max}}^{m_{max}} = \frac{1}{2}(m_{max} + m_{min})$$

$$Var\{M\} = E\{M^2\} - E^2\{M\} = \int_a^b m^2 \frac{1}{m_{max} - m_{min}} dm - \frac{1}{4}(m_{max} + m_{min})^2 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(m_{max}^2 + m_{min}m_{max} + m_{min}^2\right)^2 - \frac{1}{4}\left(m_{max} + m_{min}\right)^2 = \frac{1}{12}\left(m_{max} - m_{min}\right)^2$$

4. Per dimostrare che μ e σ sono in effetti il valore atteso e la deviazione standard della distribuzione gaussiana, avremo che:

$$E\{M\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} m e^{-(m-\mu)^2/2\sigma^2} dm =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} (m-\mu) e^{-(m-\mu)^2/2\sigma^2} dm + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} (m-\mu) e^{-(m-\mu)^2/2\sigma^2} dm =$$

$$= \mu \int_{-\infty}^{\infty} f_M(m) dm = \mu$$

poiché il primo integrale è nullo dato che la funzione integranda è una funzione dispari. Per dimostrare la seconda domanda potremo scrivere:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(m-\mu)^2/2\sigma^2} dm = \sigma\sqrt{2\pi}$$

Derivando entrambi i membri rispetto a σ, si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(m-\mu)^2}{\sigma^3} e^{-(m-\mu)^2/2\sigma^2} dm = \sqrt{2\pi}$$

Moltiplicando entrambi i membri per $\sigma^2/\sqrt{2\pi}$ si avrà infine:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} (m-\mu)^2 e^{-(m-\mu)^2/2\sigma^2} dm = Var\{M\} = \sigma^2$$

5. La variabile T ha la seguente densità di probabilità:

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{100} s^{-1} & per \quad 0 < t < 100 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

$$P\{20 \le M \le 60\} = F_T(60) - F_T(20) = \frac{60-20}{100} = 0.4$$

$$E\{T\} = \frac{100}{2} = 50\ s, \quad Var\{T\} = \frac{(100)^2}{12} s^2$$

6. Avremo:

$$P\{Il\ resistore\ non\ rispetta\ la\ specifica\} = P\{R < 0.9\ k\Omega\} + P\{R > 1.1\ k\Omega\} =$$

$$F_R(0.9\ k\Omega) + \left[1 - F_R(1.1\ k\Omega)\right] = Z\left(\frac{0.9-1.1}{0.05}\right) - \left[1 - Z\left(\frac{1.1-1}{0.05}\right)\right] =$$

$$= \text{(dalla tabella in appendice)} = 2\left[1 - Z(2)\right] \approx 0.045$$

7. Per valutare l'intervallo di confidenza del valore medio della popolazione della tensione μ_e ai capi del dispositivo con grado di fiducia del 99% calcoliamo dapprima la media e la varianza campionaria:

$$\bar{e} = 63{,}5\ mV, \quad S_e^2 = 18.94\ mV^2$$

Il campione ha ampiezza n = 10 per cui avremo υ = 9 gradi di libertà. Per la variabile di *Student t* a 9 gradi di libertà e livello di fiducia 0.99, dalle tavole in appendice si determina $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.005} = 3.25$, e dunque:

$$\bar{e} - t_p S_e \leq \mu \leq \bar{e} + t_p S_e$$

$$63.5 - 3.25\frac{\sqrt{18.94}}{\sqrt{10}} \leq \mu_e \leq 63.5 + 3.25\frac{\sqrt{18.94}}{\sqrt{10}}$$

$$59.02\ mV \leq \mu_e \leq 67.98\ mV$$

8. Per valutare l'intervallo di confidenza della varianza della popolazione σ_t^2 della durata di vita delle batterie con grado di fiducia del 99% calcoliamo dapprima la media e la varianza campionaria:

$$\bar{t} = 142{,}3\ h, \quad S_t^2 = 32.23\ h^2$$

Il campione ha ampiezza n = 10 per cui avremo υ = 9 gradi di libertà. Per la variabile del *chi-quadro* a 9 gradi di libertà e livello di fiducia 0.99, dalle tavole in appendice si determina:

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{0.995} = 1.735, \qquad \chi^2_{\frac{\alpha}{2}} = \chi^2_{0.005} = 23.589$$

$$\frac{(n-1)S_t^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \le \sigma_t^2 \le \frac{(n-1)S_t^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\frac{9 \cdot 32.23}{23.589} \le \sigma_t^2 \le \frac{9 \cdot 32.23}{1.735}; \qquad 12.29\,h^2 \le \sigma_t^2 \le 167.21\,h^2$$

Per la deviazione standard avremo invece:

$$3.50\,h \le \sigma_t \le 12.94\,h$$

9. Se $\mu = 100$ e $\sigma = 10$ si ricava facilmente con MINITAB che:

   $P\{M > 70\} = 1 - P\{M < 70\} = 1 - 0.0013499 = 0{,}9986501 \approx 99{,}87\%$;

   $P\{M < 75\} = 0{,}0062097 \approx 0.62\%$;

   $P\{70 < M < 80\} = P\{M < 80\} - P\{M < 70\} = 0{,}0227501 - 0.0013499 =$
   $= 0{,}0214002 \approx 2.14\%$

   $P\{M > 100\} = 1 - P\{M < 100\} = 1 - 0.5 = 0{,}5 = 50\%$;

   $P\{M < 70\} + P\{M > 100\} = 0.0013499 + 0.5 = 0.5013499 \approx 50.13\%$;

   $P\{M < M_0\} = 0.15 \Rightarrow M_0 = 89.6357$;

   $P\{M_1 < M < M_2\} = 0.90 \Rightarrow M_1 = 83.5515;\ M_2 = 116.4485$.

10. Dopo aver calcolato valor medio e varianza che, per suddetta variabile, valgono $\mu = \frac{1}{3}$ e $\sigma^2 = \frac{1}{9}$, avremo:

$$P\left(\left|M - \frac{1}{3}\right| \ge \frac{2}{3}\right) = 1 - P\left(\left|M - \frac{1}{3}\right| \le \frac{2}{3}\right)$$

$$=1-P\left(-\frac{1}{3}\leq M\leq 1\right)=1-\int_0^1 e^{-m}dm=1-\left[-e^{-m}\Big|_0^1\right]=$$
$$=1-\left[1-e^{-1}\right]=e^{-1}\approx 0.37$$

Con la disuguaglianza di *Tchebycheff* si trova invece:

$$P\left(\left|M-\frac{1}{3}\right|\geq\frac{2}{3}\right)\leq 0.25$$

Esercizi relativi al capitolo 3

1. Per trovare la covarianza e il coefficiente di correlazione tra due misure legate tra loro da una relazione lineare $M=aN+b$ potremo scrivere:

$$E\{NM\}=E\{N(aN+b)\}=aE\{N^2\}+bE\{N\}$$

$$E\{M\}=E\{(aN+b)\}=aE\{N\}+b$$

$$C_{NM}=E\{NM\}-E\{N\}E\{M\}=aE\{N^2\}+bE\{N\}-E\{N\}\left[aE\{N\}+b\right]=$$

$$=a\left\{E\{N^2\}-\left[E\{N\}\right]^2\right\}=a\,Var\{N\}$$

Per la (2.20) si ottiene per il coefficiente di correlazione:

$$\rho_{NM}=\frac{C_{NM}}{\sqrt{Var\{N\}Var\{M\}}}=\frac{a\,Var\{N\}}{\sqrt{Var\{N\}a^2Var\{N\}}}=\frac{a}{|a|}=\begin{cases}1 & a>0\\ -1 & a<0\end{cases}$$

2. a) Potremo scrivere le PDF di M_1 e M_2 come segue:

$$f_{M_1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-m_1^2/2}\qquad\text{e}\qquad f_{M_2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-m_2^2/2}$$

Per quanto si è sostenuto nel paragrafo 3.3.1:

$$f_M(m) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{M_1}(m_1)\, f_{M_2}(m-m_1)\, dm_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-m_1^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(m-m_1^2\right)/2} dm_1 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(m^2-2mm_1+2m_1^2\right)/2}\, dm_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-m^2/4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{2}m_1 - m/\sqrt{2}\right)^2/2}\, dm_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-m^2/4} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(u)^2/2}\, du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-m^2/4} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-m^2/2\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

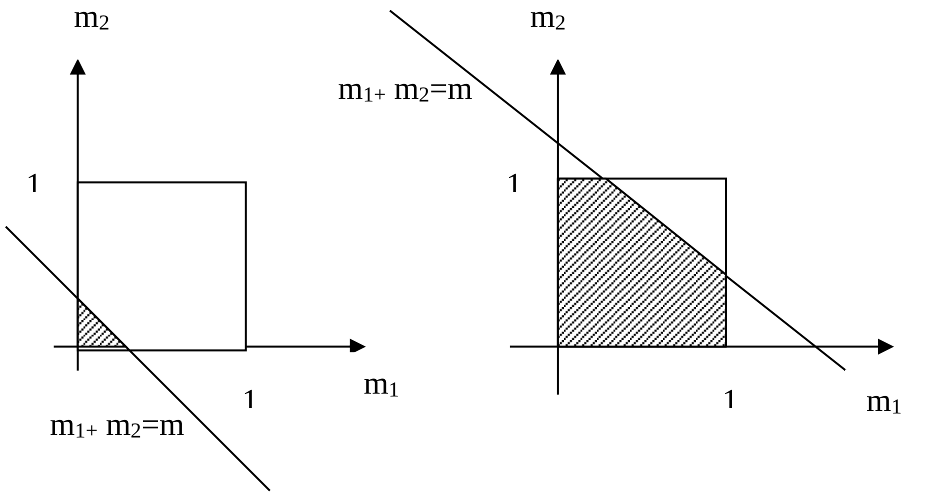
che è la PDF di una distribuzione normale a media 0 e varianza 2.

b) In questo caso potremo scrivere, trattandosi di v.a. indipendenti:

$$f_{M_1M_2}(m_1,m_2) = f_{M_1}(m_1)\, f_{M_2}(m_2) = \begin{cases} 1 & 0 < m_1 < 1, 0 < m_2 < 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Il campo di variazione di M è (0,2) e avremo:

$$f_M(m) = P\left\{M_1 + M_2 < m\right\} = \iint_{m_1+m_2 \le m} f_{M_1M_2}(m_1,m_2)\, dm_1 dm_2 = \iint_{m_1+m_2 \le m} dm_1 dm_2$$



Dall'area mostrata in figura sopra a sinistra, se 0 < z < 1:

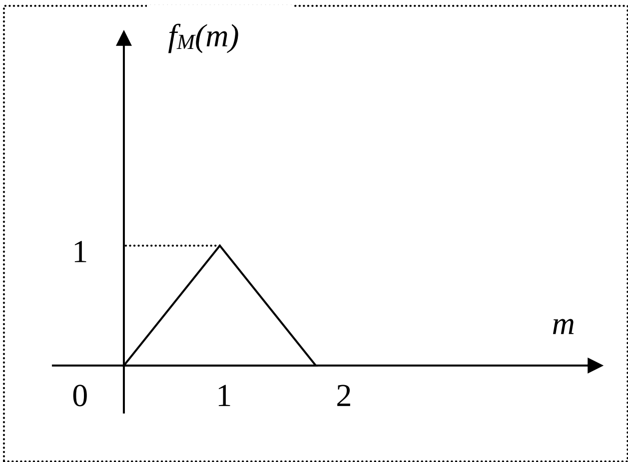
$$F_M(m) = \iint_{m_1+m_2 \le m} dm_1 dm_2 = \frac{z^2}{2} \quad \text{e} \quad f_M(m) = \frac{dF_m(m)}{dm} = z$$

Se invece 1 < z < 2, sempre dall'area in figura sopra a destra:

$$F_M(m) = \iint_{m_1+m_2 \le m} dm_1 dm_2 = 1 - \frac{(2-z)^2}{2} \qquad \text{e} \qquad f_M(m) = \frac{dF_m(m)}{dm} = 2 - z$$

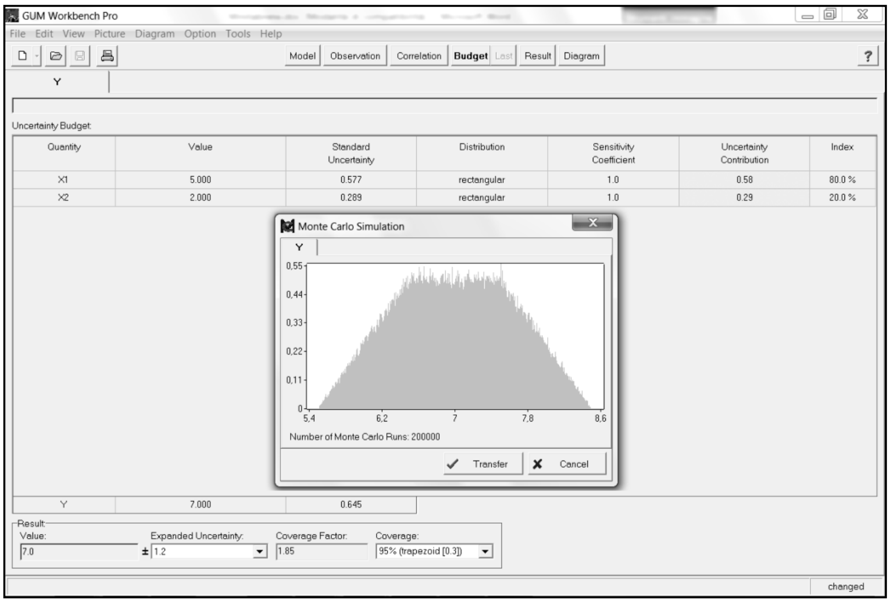
Dunque si ottiene:

$$f_M(m) = \begin{cases} z & 0 < z < 1 \\ 2-z & 1 < z < 2 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

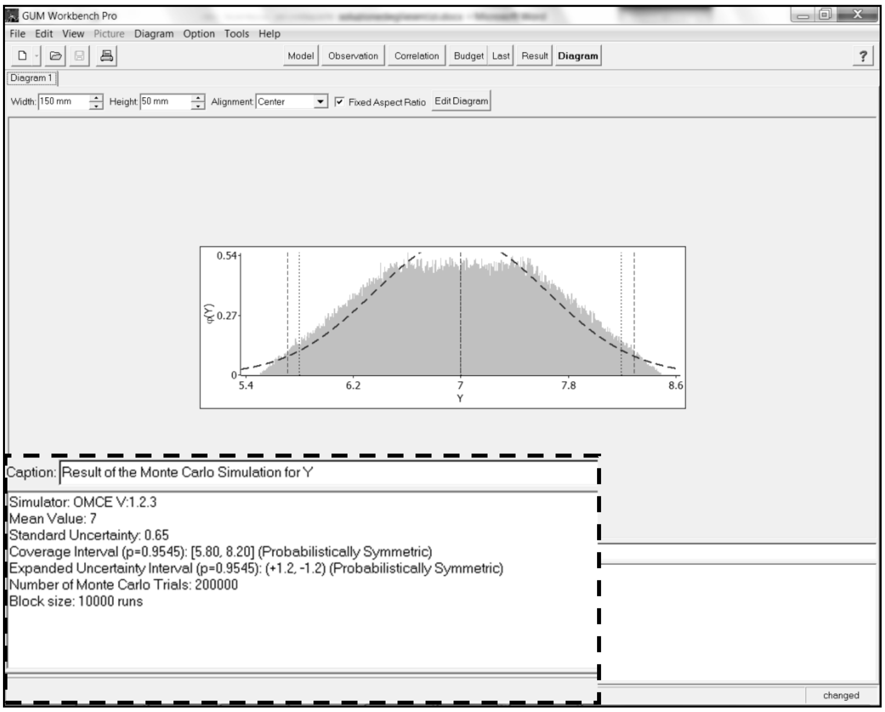


Risultato che poteva essere ottenuto anche dal prodotto di convoluzione delle due densità marginali $f_1(m_1)$ e $f_2(m_2)$ di M_1 e M_2.

3. Realizziamo con GUM Workbench la propagazione delle PDF tramite MCM, nel caso in esame si sono sommate due PDF rettangolari: una a valor medio 5 e semi ampiezza 1, l'altra a valor medio 2 e semiampiezza 0.5. Si ottiene la finestra riportata a pagina seguente.



Confermando l'operazione si ottiene il grafico a schermo intero con la finestra di riepilogo dei risultati, come possiamo osservare:



Il valore atteso di Y utilizzando la (2.11) è:

$$E\{M\} = E\{c_1 M_1\} + E\{c_2 M_2\} = c_1 E\{M_1\} + c_2 E\{M_2\} = c_1 m_1 + c_2 m_2$$

Ricordando la definizione (2.14) e le proprietà dell'operatore E possiamo calcolare la varianza:

$$Var\{M\} = E\{M^2\} - E^2\{M\} = E\left\{\left[c_1 M_1 + c_2 M_2\right]^2\right\} - \left[c_1 m_1 + c_2 m_2\right]^2 =$$

$$= c_1^2 E\{M_1^2\} + c_2^2 E\{M_2^2\} - c_1^2 m_1^2 - c_2^2 m_2^2 = c_1^2 Var\{M_1\} + c_2^2 Var\{M_2\}$$

da cui segue la deviazione standard rispetto al valore atteso m:

$$\sigma_M = \sqrt{Var\{M\}} = \sqrt{c_1^2 \frac{\left(m_{max1} - m_{min1}\right)^2}{12} + c_2^2 \frac{\left(m_{max2} - m_{min2}\right)^2}{12}}$$

la combinazione lineare delle due PDF rettangolari simmetriche, come visto con GUM Workbench, porta ad ottenere una PDF $g_M(m)$ simmetrica e di tipo trapezoidale la cui semi-ampiezza è (2.3.3):

$$c_1 \frac{\left(m_{max1} - m_{min1}\right)}{2} + c_2 \frac{\left(m_{max2} - m_{min2}\right)}{2}$$

4. Utilizzando l'espressione (3.20) si ottiene:

$$\sigma_M^{\ 2} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{df}{dM_i}\right)^2 \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{df}{dM_i}\frac{df}{dM_j}Cov\left(M_i, M_j\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{df}{dM_i}\right)^2 \sigma_i^2 + 2\frac{df}{dM_1}\frac{df}{dM_2}Cov\left(M_1, M_2\right) = c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2$$

Come si può notare il risultato è identico a quello trovato analiticamente nell'esercizio 3, questo accade perché abbiamo utilizzato un modello lineare, in casi più complessi utilizzare la legge di propagazione delle incertezze con Taylor al primo ordine può portare ad approssimazioni, anche piuttosto rilevanti.

5. Si chiede di valutare la misura di una resistenza eseguita con un multimetro numerico. Sono note una serie di misure eseguite ed alcune caratteristiche dello strumento, quali fondo scala e accuratezza. Inoltre si conosce l'entità di un'altra fonte d'incertezza relativa alla temperatura di lavoro (u_T). Si procede ricavando stima e incertezza di categoria A tramite metodo probabilistico. L'incertezza di categoria B invece si ricava dalle informazioni sull'accuratezza, ipotizzando i valori distribuiti secondo distribuzione uniforme. L'incertezza composta trovata può essere riportata in valore relativo e messa in quadratura con quella legata alla temperatura di esercizio.

$$\bar{R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i \cong 10{,}67m\Omega$$
$$u_{R_A} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})^2} \cong 0{,}67m\Omega$$
$$u_{R_B} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cong 0{,}066m\Omega$$
$$u_R = \sqrt{{u_{R_A}}^2 + {u_{R_B}}^2} \cong 0{,}69m\Omega$$
$$u'_T = \sqrt{{u'_R}^2 + {u'_T}^2} \cong 0{,}063$$
$$R = 10{,}67m\Omega \pm 6{,}3\%$$
$$R = (10{,}67 \pm 0{,}67)m\Omega$$

6. Si chiede di determinare l'intervallo finale di misura con un determinato livello di fiducia, di una serie di misurazioni ripetute di resistenza, considerando trascurabili le incertezze legate allo strumento. Dalle varie rilevazioni si ricava la stima e l'incertezza tipo assoluta di categoria A tramite metodo probabilistico. Note entrambe si può passare facilmente all'incertezza relativa e noto l'intervallo di fiducia a quella estesa, ricavando il fattore di copertura *k*.

$$\bar{R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i \cong 100{,}04\Omega$$
$$u_{R_A} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})^2} \cong 0{,}034\Omega$$

$u_R{}' = \dfrac{u_{R_A}}{\bar{R}} \cong 0{,}00034$
$U_R = u_{R_A} k$

Il fattore di copertura k si ricava dalla tabella della distribuzione normale standardizzata, sulla quale occorre leggere il valore di z che si può ricavare dalla tavola 7.1.

$\phi_x - (1 - \phi_x) = 0{,}92$
$\phi_x = 0{,}96$
Il valore più vicino a 0,96 è 0,9599 per il quale si ha z = 1,75 = k
$U_R \cong 0{,}059\Omega$

7. Si chiede di stabilire la misura di una corrente misurata tramite multimetro numerico. Si conoscono alcune letture ripetute e l'accuratezza dello strumento. Si procede determinando stima e incertezza di categoria A sulle letture tramite metodo probabilistico. Si deduce il count, necessario per l'accuratezza, dal numero di cifre con il quale sono indicate le letture sul display dello strumento. Ipotizzando una distribuzione uniforme dei valori si individua l'incertezza di categoria B. La loro composizione in quadratura è l'incertezza assoluta della stima cercata.

$\bar{I} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_i = 3{,}00A$

$\mathrm{u_{I_A}} = \sqrt{\dfrac{1}{\mathrm{n(n\text{-}1)}}\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}(\mathrm{I_i}\text{-}\bar{\mathrm{I}})^2} = 0{,}01\mathrm{A}$

$\mathrm{u_{I_B}} = \dfrac{\mathrm{a}}{\sqrt{3}} = 0{,}063\mathrm{A}$

$\mathrm{u_I} = \sqrt{\mathrm{u_{I_A}}^2 + \mathrm{u_{I_B}}^2} \cong 0{,}038\mathrm{A}$

$\mathrm{I} = (3{,}000 \pm 0{,}038)\mathrm{A}$

8. Date due tensioni dipendenti tra loro, con coefficiente di correlazione noto, si richiede di stimare il risultato della loro somma e del quadrato della loro somma. Dalla relazione che lega il coefficiente di

correlazione alle incertezze delle grandezze correlate, si ricava la covarianza necessaria per calcolare l'incertezza sulla stima della somma delle tensioni. Si ricordi che, per quest'ultima, è necessario ipotizzare correlate le grandezze in gioco, note u_{E1} e u_{E2}, note u_{E1}<<E_1 e u_{E2}<<E_2, e che le derivate parziali della somma rispetto alle singole tensioni siano finite e calcolabili.

$$\rho_{1,2} = \frac{C_{1,2}}{u_{E_1} u_{E_2}} = -1$$
$$\overline{E_S} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 \cong 1{,}8mV$$
$$\mathrm{u}_{E_S} = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{E}_1}\right)^2 \mathrm{u}_{\mathrm{E}_1}{}^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{E}_2}\right)^2 \mathrm{u}_{\mathrm{E}_2}{}^2 + 2\left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{E}_1}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{E}_2}\right) \mathrm{C}_{1,2}} \cong 0{,}001\mathrm{mV}$$
$$E_S = (1{,}800 \pm 0{,}001)mV$$

Per quello che riguarda l'incertezza del quadrato di E si può procedere allo stesso modo.

$$\overline{E_P} = E_1\, E_2 = 0{,}8\ (\mathrm{mV})^2$$
$$\mathrm{u}_{E_P} = \sqrt{\left(\frac{\partial E_P}{\partial \mathrm{E}_1}\right)^2 \mathrm{u}_{\mathrm{E}_1}{}^2 + \left(\frac{\partial E_P}{\partial \mathrm{E}_2}\right)^2 \mathrm{u}_{\mathrm{E}_2}{}^2 + 2\left(\frac{\partial E_P}{\partial \mathrm{E}_1}\right)\left(\frac{\partial E_P}{\partial \mathrm{E}_2}\right) \mathrm{C}_{1,2}}$$
$$\cong 0{,}0028(\mathrm{mV})^2$$
$$E_P = (800 \pm 0{,}02)(\mu\mathrm{V})^2$$

9. Si chiede di valutare il risultato di una misura indiretta di un parallelo tra una resistenza e un induttanza, note le loro incertezze, la loro indipendenza e la frequenza di utilizzo. Viene reso noto anche il fattore di copertura, che sta implicitamente ad indicare che le incertezze dichiarate sono estese. Per prima cosa occorre riportare le incertezze estese in assolute, utilizzando il fattore di copertura noto. Dal modello del parallelo si ricava la stima e successivamente la sua l'incertezza tipo. Per utilizzare il metodo probabilistico occorre ipotizzare indipendenti le grandezze L e R, note le loro incertezze u_L e u_R, u_L<<L e u_R<<R, finite e calcolabili le derivate parziali del parallelo Z_P rispetto a R e L. Attenzione nel calcolo del parallelo, occorre lavorare con i numeri complessi.

$$|Z_L| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \cong 62{,}84\Omega$$
$$\overline{Z_P} = \frac{\bar{R}\overline{Z_L}}{\bar{R} + \overline{Z_L}} = \frac{\bar{R}\overline{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}}{\bar{R} + \overline{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}} = \frac{\sqrt{\omega LR}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cong 126{,}1407m\Omega$$
$$u_{Z_P} = \sqrt{\left(\frac{\partial Z_P}{\partial R}\right)^2 u_R{}^2 + \left(\frac{\partial Z_P}{\partial L}\right)^2 u_{Z_L}{}^2} \cong 0{,}0013m\Omega$$
$$Z_P = (126{,}1407 \pm 0{,}0013)\Omega$$

10. Si chiede di determinare il risultato di una misura indiretta utilizzando una relazione data. Sono date stime e incertezze relative di tutti i fattori che compaiono nella relazione. Si procede ricavando le incertezze assolute a partire da quelle relative e dai coefficienti di copertura.

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{L}}{\bar{R}} - \overline{CR} = 0{,}04\mu s$$
$$\mathrm{U_L} = \frac{\mathrm{U_{L\%}}\bar{\mathrm{L}}}{100}$$
$$u_L = \frac{U_L}{k} = 0{,}24\mu H$$
$$u_R = 0{,}1\Omega$$
$$u_{CR} = 1{,}6ns$$

Per il calcolo dell'incertezza si devono ipotizzare L, R e CR indipendenti, u_L, u_R e u_{CR} note, u_L<<L, u_R<<R e u_{CR}<<CR, le derivate parziali di τ rispetto a L, R e CR finite e calcolabili.

$$\mathrm{u_\tau} = \sqrt{\left(\frac{\partial\tau}{\partial \mathrm{L}}\right)^2 \mathrm{u_L}^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial \mathrm{R}}\right)^2 \mathrm{u_R}^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial(\mathrm{CR})}\right)^2 \mathrm{u_{CR}}^2} \cong 2{,}89ns$$
$$\tau = (40 \pm 2{,}89)ns$$

11. Si chiede di valutare stima e incertezza di una serie di misure di tensione effettuate con un voltmetro digitale. Sono note l'accuratezza dello strumento legata al valore letto e al fondo scale. Inoltre sono noti alcuni valori di fondo scale selezionabili sullo strumento. Si chiede di

valutare la misura di tensione suddetta con tutti i valori di fondo scale disponibili. Si procede utilizzando il metodo probabilistico nella ricerca della stima della tensione e della sua incertezza di categoria A. Per l'incertezza di categoria B, necessaria a determinare quella composta si utilizza di volta in volta un fondo scale diverso tra quelli disponibili. In questa fase si ipotizza la distribuzione dei valori uniforme.

$$\overline{V}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i = 1{,}54V$$

Con valore di fondo scala Vfs=1V

$$u_{V_B}=\frac{a}{\sqrt{3}}\cong 0{,}010046V$$

$$u_V=\sqrt{{u_{V_A}}^2+{u_{V_B}}^2}\cong 0{,}016V$$

$$V=(1{,}540 \pm 0{,}016)V$$

Con valore di fondo scala Vfs=10V

$$u_{V_B}=\frac{a}{\sqrt{3}}\cong 0{,}020438V$$

$$u_V=\sqrt{{u_{V_A}}^2+{u_{V_B}}^2}\cong 0{,}024V$$

$$V=(1{,}540 \pm 0{,}024)V$$

Con valore di fondo scala Vfs=100V

$$u_{V_B}=\frac{a}{\sqrt{3}}\cong 0{,}124361V$$

$$u_V=\sqrt{{u_{V_A}}^2+{u_{V_B}}^2}\cong 0{,}125V$$

$$V=(1{,}54 \pm 0{,}13)V$$

Con valore di fondo scala Vfs=1000V

$$u_{V_B}=\frac{a}{\sqrt{3}}\cong 1{,}163592V$$

$$u_V=\sqrt{{u_{V_A}}^2+{u_{V_B}}^2}\cong 1{,}163V$$

$$V=(1{,}54 \pm 1{,}63)V$$

12. Data la definizione di decibel si chiede si calcolare il rapporto di due potenze, note le loro incertezze, da esprimere appunto in decibel. Supposte indipendenti le grandezze in gioco, note le loro incertezze u_{P1} e u_{P2}, con $u_{P1} << P_1$ e $u_{P2} << P_2$, supposte anche le derivate parziali del loro rapporto rispetto a P1 e P2 finite e calcolabili, si può procedere con la valutazione nel seguente modo.

$$\bar{G} = 10 log\left(\frac{\overline{P_2}}{\overline{P_1}}\right) = -20dB$$

$$\frac{\partial G}{\partial P_1} = 10\frac{1}{\frac{P_2}{P_1} log10}\left(-\frac{P_2}{P_1}\right)$$

$$\frac{\partial G}{\partial P_2} = 10\frac{1}{\frac{P_2}{P_1} log10}\left(\frac{1}{P_1}\right)$$

$$u_G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial P_1}\right)^2 {u_{P_1}}^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial P_2}\right)^2 {u_{P_2}}^2} = 0{,}061dB$$

G=(-20,000±0,061)dB

13. Si chiede di valutare la misura di potenza, esprimendola anche in dBm, dissipata su un resistere, noti i valori di corrente e tensione affetti da incertezza. Essendo noto anche il valore del resistore si chiede di valutare la potenza utilizzando tutte le relazioni possibili.

$$\bar{P} = \bar{R}\bar{I}^2 = 0{,}02mW$$

$$u_P = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right)^2 {u_I}^2} = 0{,}004mW$$

$$P = (0{,}020 \pm 0{,}004)mW$$

Si ricordi che per riportare stima e incertezza in dBm è necessario trasformare in dBm il valore massimo e minimo assunto dalla misura e da esso ricavare l'incertezza.

$$P_{dBm} = 10log\left(\frac{P_{(mW)}}{1_{(mW)}}\right) \cong 13{,}01dBm$$
$$P_{MAX} = 0{,}020 + 0{,}004 = 0{,}024W$$
$$P_{MIN} = 0{,}020 - 0{,}004 = 0{,}016W$$
$$P_{MAX_{dBm}} = 10log\left(\frac{P_{(mW)}}{1_{(mW)}}\right) = 10log\left(\frac{24}{1}\right) \cong 13{,}80dBm$$
$$P_{MIN_{dBm}} = 10log\left(\frac{16}{1}\right) \cong 12{,}04dBm$$
$$u_{P_{(dBm)}} = \frac{P_{MAX_{dBm}} - P_{MIN_{dBm}}}{2} \cong 0{,}88dB$$
$$P = 13{,}80dBm \pm 0{,}88dB$$

Di seguito lo stesso calcolo utilizzando le altre relazioni.

$$P = VI = 200\mu W$$
$$u_P = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial I}\right)^2 {u_I}^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)^2 {u_V}^2} \cong 28{,}28\mu W$$
$$P = (200 \pm 028)\mu W$$
$$P = -6{,}99dBm \pm 0{,}62dB$$

$$P = \frac{V^2}{R} = 0{,}002mW$$
$$u_P = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)^2 {u_V}^2} \cong 0{,}4\mu W$$
$$P = (2 \pm 0{,}4)\mu W$$
$$P = -26{,}99dBm \pm 0{,}88dB$$

14. Si chiede di ricavare la potenza dissipata da un resistere sottoposto ad una certa tensione. Di questa tensione si conoscono alcune misure eseguite con un voltmetro digitale mentre del resistore si conosce una misura data da stima ed incertezza relativa estesa. Inoltre il voltmetro è

affetto da un errore sulla lettura che si può tradurre come un'accuratezza. Si procede trovando stima ed incertezze delle misure di tensione dichiarate, utilizzando il metodo probabilistico. Quella appena trovata è un'incertezza di categoria A, ma nel testo si fa riferimento anche all'accuratezza dello strumento che porta necessariamente alla valutazione di un'incertezza aggiuntiva di categoria B. Dall'incertezza estesa relativa del resistore si ricava quella assoluta. Dalla relazione che lega potenza a tensione e resistenza si trova la stima della potenza. Per trovare la sua incertezza è necessario ipotizzare note le u_V e u_R, u_V<<V e u_R<<R, le derivate parziali della potenza rispetto a tensione e resistenza finite e calcolabili.

$$\bar{V} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i \cong 5{,}002V$$

$$u_{V_A} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(V_i - \bar{V})^2} \cong 4{,}041mV$$

$$u_{V_B} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cong 2{,}89mV$$

$$u_V = \sqrt{{u_{V_A}}^2 + {u_{V_B}}^2} \cong 4{,}967mV$$

$$u_R = U_R\bar{R} = 1\Omega$$

$$u_P = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)^2 {u_V}^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial R}\right)^2 {u_R}^2} \cong 0{,}056mW$$

$$\bar{P} = \frac{\overline{V^2}}{\bar{R}} \cong 25{,}02mW$$

$$P = (25{,}020 \pm 0{,}056)mW$$

15. Data potenza e resistenza si chiede di ricavare la tensione applicata ad un resistore. Sono note, oltre alle stime, incertezza sulla potenza (assoluta) e tolleranza sulla resistenza (relativa). Per calcolare l'incertezza sulla tensione occorre tenere presenti le ipotesi d'indipendenza di potenza e resistenza, u_P
e u_R note, u_P<<P e u_R<<R, derivate parziali della potenza rispetto a

tensione e resistenza finite e calcolabili.

$$\bar{V} = \sqrt{\bar{P}\bar{R}} \cong 2{,}258V$$

$$u_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)^2 u_P{}^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial R}\right)^2 u_R{}^2} \cong 66{,}66mV$$

$$V = (2{,}258 \pm 0{,}067)V$$

16. Si chiede si calcolare stima e incertezza di una funzione data. Nella funzione compare una corrente che andrà anch'essa stimata (con incertezza) attraverso metodo probabilistico, in quando presentata con letture ripetute. Lo strumento utilizzato per tali letture è affetto da un errore massimo costituito da una componente legata alla portata e una componente legata alla lettura. Si procede individuando le due componenti dell'accuratezza dello strumento, riportando un'unica incertezza di categoria B, supponendo di utilizzare una distribuzione uniforme. Trovata anche l'incertezza di categoria A, si hanno tutti gli elementi necessari per trovare quando richiesto. E' necessario ipotizzare nota u_I u_I<<I e la derivata parziale della funzione rispetto alla corrente finita e calcolabile.

$$\bar{I} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_i \cong 10{,}48mA$$

$$u_{I_A} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(I_i - \bar{I})^2} \cong 0{,}016mA$$

$$u_{I_B} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cong 0{,}018mA$$

$$u_I = \sqrt{u_{I_A}{}^2 + u_{I_B}{}^2} \cong 0{,}023mA$$

$$\bar{X} = \sqrt[5]{\bar{I}} \cong 1599{,}82\mu A$$

$$u_X = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial I}\right)^2 u_I{}^2} \cong 0{,}72\mu A$$

$$X = (1599{,}82 \pm 0{,}72)\mu A$$

17. Nella prima parte si chiede di trovare stima, incertezza assoluta e relativa di alcune funzioni note le grandezze che le costituiscono, fornite anch’esse di stima ed incertezza. Solo per la prima funzione se ne esplicano i passaggi, per le altre si presentano solo i risultati lasciando invariate e sempre valide le stesse ipotesi e considerazioni. Le due grandezze che costituiscono la funzione, X e Y, sono indipendenti, le loro incertezze u_X e u_Y note, $u_X<<X$ e $u_Y<<Y$, e le derivate parziali di U rispetto a X e Y finite e calcolabili.
Nella seconda parte si aggiunge una terza grandezza Z, oltre a X e Y, anch’essa presentata con stima ed incertezza. In questa condizione devono essere aggiornate le ipotesi poiché si aggiunge un termine nel calcolo dell’incertezza di U. Da adesso anche Z è indipendente rispetto a X e Y, u_Z nota, $u_Z<<Z$ e anche la derivata parziale di U rispetto a Z finita e calcolabile.

$$a)\ \bar{U} = \bar{X}\sqrt{\bar{Y}} \cong 13{,}27;\ u_U = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 {u_X}^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2 {u_Y}^2} \cong 0{,}49;\ u'_U \cong 0{,}037$$

$b)\ U = (44{,}00 \pm 2{,}46); U = 44{,}0 \pm 5{,}6\%$
$c)\ U = (137{,}00 \pm 13); U = 137 \pm 9{,}49\%$

$$d)\ \bar{U} = \bar{X} + \bar{Y}\bar{Z} = 34;\ u_U = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 {u_X}^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2 {u_Y}^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Z}\right)^2 {u_Z}^2} \cong 1{,}19;\ u'_U \cong 0{,}035$$

$e)\ U = (16{,}00 \pm 2{,}5); U = 16 \pm 15{,}63\%$
$f)\ U = (3{,}48 \pm 0{,}24); U = 3{,}48 \pm 6{,}90\%$
$g)\ U = (70{,}03 \pm 3{,}58); U = 70{,}03 \pm 5{,}12\%$

18. Data una legge fisica che regola la rifrazione di un raggio luminoso nella transizione tra due mezzi di trasmissione, si chiede di valutare stima e incertezza di un fattore che compare nella relazione, dati i valori delle altre grandezze in gioco con la loro incertezza. Si procede stimando il seno dei due angoli in gioco e dalla suddetta relazione si individua subito la stima del fattore cercato. Successivamente si portano

in relative le incertezza assolute date. Mettendole in quadratura trovo l'incertezza relativa del fattore incognito che, nota ormai la stima, posso riportare in assoluta.

$$\sin\theta_1 = n\sin\theta_2$$
$$\bar{n} = \frac{\overline{\sin\theta_1}}{\overline{\sin\theta_2}} \cong 1{,}176$$
$$u_n = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial\theta_1}\right)^2 {u_{\theta_1}}^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial\theta_2}\right)^2 {u_{\theta_2}}^2} \cong 0{,}017$$
$$n = (1{,}176 \pm 0{,}017)$$

19. Si chiede di stimare e di valutare l'incertezza su tale stima di una quantità di carbonio misurata con una strumentazione particolare. Sono date alcune misure eseguite ad una certa temperatura e l'incertezza che lo strumento riporta nell'eseguirle, espressa come accuratezza. Inoltre viene dichiarata un'altra incertezza dovuta a condizioni ambientali diversificate. Si procede calcolando stima e incertezza (categoria A) sulle misure eseguite, con metodo probabilistico. Si riporta l'accuratezza indicata in incertezza ipotizzando l'utilizzo di una distribuzione uniforme (categoria B) e si somma in quadratura con la precedente. Dopo occorre integrare anche quell'incertezza dovuta alla differenza di temperatura. Per farlo può essere sommata in quadratura in quanto anch'essa di categoria B.

$$\bar{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i \cong 1{,}0823\mu g$$
$$u_{P_A} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(P_i - \bar{P})^2} \cong 4{,}8858ng$$
$$u_{P_B} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cong 0{,}5774ng$$
$$u_T = 3\frac{\bar{P}}{1000} = 3{,}2469ng$$
$$u_P = \sqrt{{u_{P_A}}^2 + {u_{P_B}}^2 + {u_T}^2} \cong 8{,}2308ng$$
$$P = 1{,}0823\mu g \pm 0{,}77\%$$
$$P = (1{,}0823 \pm 0{,}0082)\mu g$$

20. Dall'equazione tipica del pendolo semplice si chiede di ricavare stima e incertezza del valore dell'accelerazione di gravità dati periodo di oscillazione e lunghezza del pendolo. Solo il valore di lunghezza è affetto da incertezza quindi è sufficiente ipotizzare tale incertezza u_L nota, u_L<<L e che la derivata parziale dell'accelerazione rispetto alla lunghezza sia finita e calcolabile.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{G}}$$

$$\bar{G} = \frac{4\pi^2\bar{L}}{\overline{T^2}} \cong 9{,}808\,\frac{m}{s^2}$$

$$u_G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial L}\right)^2 u_L{}^2} \cong 0{,}088\,\frac{m}{s^2}$$

$$G = (9{,}808 \pm 0{,}088)\,\frac{m}{s^2}$$

$$G = 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \pm 0{,}09\%$$

21. Si chiede di stimare la misura di un campione di resistenza rappresentato da un resistore sul quale sono state effettuate una serie di misure con un multimetro digitale. Sono indicate il numero delle cifre del display dello strumento e la sua accuratezza. Ci sono anche altre fonti d'incertezza, espresse in percentuale, legate ad effetti termoresistivi sul resistore e all'incertezza sul termometro che monitora la temperatura del bagno di olio in cui è immerso. Tramite metodo probabilistico si individua la stima del valore di resistenza e la sua incertezza assoluta di categoria A. Anche le altre fonti d'incertezze indicate possono essere inglobate in un'incertezza composta unica data dalla quadratura di tutte quelle indicate.

$$\bar{R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i \cong 1{,}0000105\Omega$$

$$u_{R_A} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})^2} \cong 0{,}07\Omega$$
$$u_{R_{B1}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cong 58{,}31\mu\Omega$$
$$u_{R_{B2}} = 0{,}003\%\ \bar{R}$$
$$u_R = \sqrt{{u_{R_A}}^2 + {u_{R_{B1}}}^2 + {u_{R_{B2}}}^2} \cong 61{,}65\mu\Omega$$
$$R = (1{,}0000105 \pm 0{,}0000616)\Omega$$

22. Si chiede di valutare una misura indiretta di accelerazione mediante due modelli diversi. Sono dati spazio percorso, velocità istantanea rilevata e tempo trascorso nel percorrete quel determinato spazio. Infine si chiede di mostrare graficamente se le due misure ottenute sono compatibili.
Si procede trovando prima le stime tramite i due modelli e poi le loro incertezza tramite derivate parziali. Per questo motivo si ipotizzano note le incertezze delle grandezze in gioco u_V e u_t, u_V<<V e u_t<<t, le derivate parziali dell'accelerazione rispetto a velocità e tempo finite e calcolabili.

$$\overline{a_1} = \frac{\bar{V}^2}{2\bar{s}} \cong 1{,}1\frac{m}{s^2}$$
$$u_{a_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial a_1}{\partial V}\right)^2 {u_V}^2} = 0{,}21\frac{m}{s^2}$$
$$\overline{a_2} = \frac{2\bar{s}}{\bar{t}^2} \cong 14{,}79\frac{m}{s^2}$$
$$u_{a_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial a_2}{\partial t}\right)^2 {u_t}^2} \cong 1{,}14\frac{m}{s^2}$$
$$a_1 = (1{,}10 \pm 0{,}21)\frac{m}{s^2}$$
$$a_1 = 1{,}10\frac{m}{s^2} \pm 19{,}05\%$$
$$a_2 = (14{,}79 \pm 1{,}14)\frac{m}{s^2}$$
$$a_1 = 14{,}79\frac{m}{s^2} \pm 7{,}69\%$$

Per quello che riguarda la compatibilità si nota che il valore massimo che può raggiungere la prima misura non si avvicina assolutamente al minimo della seconda, quindi non sono compatibili. Graficamente tale situazione è estremamente evidenziata.

$$a_{1_{MAX}} \cong 1{,}10 + 0{,}21 \cong 1{,}31\,\frac{m}{s^2}$$
$$a_{2_{MAX}} \cong 14{,}79 - 1{,}14 \cong 13{,}65\,\frac{m}{s^2}$$

23. Dopo aver definito e chiarito il significato delle incertezza di categoria A e B e di quella di tipo esteso, si chiede di trovare incertezza assoluta e relativa di una funzione data. Rimandando al testo di riferimento le definizioni, di seguito il calcolo richiesto.

$$Y = X^{\frac{4}{5}}$$
$$u_Y = \sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)^2 {u_X}^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{5\sqrt[5]{5}}\right)^2 {u_X}^2} = \left(\frac{4}{5\sqrt[5]{5}}\right) u_X$$
$$u_{Y_{REL}} = \frac{u_Y}{\overline{Y}} = \frac{4}{5X}$$

24. Si chiede di valutare stima e incertezza di un parallelo di due resistori. Sono date le misure ripetute di resistenza su entrambi i resistori, eseguite con multimetri diversi in occasioni diverse ma con stessa accuratezza data. Tale accuratezza è costituita da una componete relativa al valore letto e da una componente legata al count. Da come sono indicate le misure (numero di cifre sul display) deduco il valore del count, che è il più piccolo valore che quei multimetri possono mostrare. Si procede inizialmente cercando stima e incertezza di categoria A tramite metodo probabilistico di entrambi i resistori. Successivamente si passa a quella di categoria B, relativa all’accuratezza dello strumento, da mettere in quadratura con quella precedente mente trovata. Utilizzando la relazione che lega due resistori in parallelo si ricava la stima cercata. Per la sua incertezza occorre indicare le ipotesi di indipendenza delle due grandezze R_1 e R_2, u_{R1} e u_{R2} note, $u_{R1} \ll R_1$ e $u_{R2} \ll R_2$, derivate parziali del R_X rispetto a R_1 e R_2 finite e calcolabili.

$$\overline{R_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_{1_i} \cong 1{,}582k\Omega$$
$$u_{R_{1A}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(R_{1_i} - \overline{R_1}\right)^2} \cong 0{,}013k\Omega$$
$$u_{R_{1B}} = u_{R_{1A}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cong 0{,}018k\Omega$$
$$u_{R_1} = \sqrt{u_{R_{1A}}{}^2 + u_{R_{1B}}{}^2} \cong 0{,}022k\Omega$$
$$R_1 = (1{,}582 \pm 0{,}022)k\Omega$$
$$R_2 = (7{,}990 \pm 0{,}045)K\Omega$$
$$\overline{R_X} = \frac{\overline{R_1}\,\overline{R_2}}{\overline{R_1} + \overline{R_2}} \cong 1{,}321k\Omega$$
$$u_{R_X} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_X}{\partial R_1}\right)^2 u_{R_1}{}^2 + \left(\frac{\partial R_X}{\partial R_2}\right)^2 u_{R_2}{}^2} \cong 0{,}015k\Omega$$
$$R_X = (1{,}321 \pm 0{,}015)k\Omega$$
$$R_X = 1{,}321k\Omega \pm 1{,}14\%$$

25. Si chiede di valutare stima e incertezza su una misura indiretta di corrente date alcune misure di potenza dissipata su un resistore e relativo valore di resistenza. Dalle misure di potenza si ricava stima e incertezza assoluta di categoria A attraverso metodo probabilistico. Non ci sono altre indicazione che identifichino anche un'incertezza di categoria B. Sulle singole misure di resistenza invece c'è un'indicazione riguardo l'accuratezza, legata ad una percentuale del valore letto e al count. Da come è indicata l'unica misura di tale resistenza si individua il count per poi arrivare a determinare l'incertezza, valutata ipotizzando una distribuzione uniforme dei valori. Dalla relazione che lega potenza a resistenza si trova la stima della corrente cercata. Per individuare la sua incertezza occorre tenere presenti le ipotesi d'indipendenza di P e R, u_P e u_R note, $u_P \ll P$ e $u_R \ll R$, le derivate parziali della corrente rispetto a potenza e resistenza finite e calcolabili.

$$\bar{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i \cong 1{,}016W$$

$$u_P = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(P_i - \bar{P})^2} \cong 0{,}003W$$
$$u_R = \frac{a}{\sqrt{3}} \cong 2{,}304\Omega$$
$$I = \sqrt{\frac{\bar{P}}{\bar{R}}} \cong 26{,}073mA$$
$$u_I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)^2 {u_P}^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial R}\right)^2 {u_R}^2} \cong 0{,}042mA$$
$$I = (26{,}073 \pm 0{,}042)mA$$

26. Dati due multimetri di accuratezza nota e alcune misure rilevate con esse, si chiede di valutarne stima e incertezza, e stabilire quale strumento è il migliore.
    Attraverso metodo probabilistico si possono individuare stima e incertezza di categoria A delle rilevazioni effettuate. Nota la risoluzione degli strumenti e il valore di fondo scala si possono ricavare le due accuratezza, dipendenti dal valore letto, dal count e dal Vfs. Ipotizzando poi una distribuzione dei valori uniforme, dalle accuratezza si passa alle incertezza di categoria B, che sommate in quadratura con quelle di categoria A portano all'incertezza composta richiesta.

$$\bar{V_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_{1_i} \cong 100{,}033V$$
$$u_{V_{1A}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(V_{1_i} - \bar{V_1}\right)^2} \cong 0{,}088V$$
$$u_{V_{1B}} = \frac{a_1}{\sqrt{3}} \cong 0{,}087V$$
$$u_{V_1} = \sqrt{{u_{V_{1A}}}^2 + {u_{V_{1B}}}^2} \cong 0{,}12V$$
$$V_1 = (100{,}03 \pm 0{,}12)V$$

$$\overline{V_2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_{2_i} \cong 100{,}033V$$

$$u_{V_{2A}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(V_{2_i} - \overline{V_2}\right)^2} \cong 0{,}12V$$

$$u_{V_{2B}} = \frac{a_2}{\sqrt{3}} \cong 0{,}064V$$

$$u_{V_2} = \sqrt{{u_{V_{2A}}}^2 + {u_{V_{2B}}}^2} \cong 0{,}137V$$

$$V_2 = (100{,}033 \pm 0{,}14)V$$

Lo strumento migliore è quello affetto da incertezza minore, quindi il secondo.

27. Si richiede di valutare la misura indiretta di un parallelo e di una serie di due resistori dati. Sostituendo poi il primo resistore con uno qualitativamente migliore (con incertezza minore) si richiede di effettuare nuovamente la valutazione della misura di serie e parallelo e commentarne i risultati. Si procede utilizzando la relazione che lega due resistenze alla loro serie e al loro parallelo, per il calcolo di tale incertezza si ipotizzano note le incertezze u_{R1} e u_{R2} sui singoli resistori, $u_{R1} << R1$, $u_{R2} << R2$ e le derivate parziali della resistenza del parallelo R_P e serie R_S rispetto a R_1 e R_2 finite e calcolabili.

$$\overline{R_S} = \overline{R_1} + \overline{R_2} \cong 120\Omega$$

$$u_{R_S} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_S}{\partial R_1}\right)^2 {u_{R_1}}^2 + \left(\frac{\partial R_S}{\partial R_2}\right)^2 {u_{R_2}}^2} \cong 10{,}05\Omega$$

$$R_S = (120{,}00 \pm 10{,}05)\Omega$$

$$\overline{R_P} = \frac{\overline{R_1 R_2}}{\overline{R_1} + \overline{R_2}} \cong 16{,}67\Omega$$

$$u_{R_P} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_P}{\partial R_1}\right)^2 {u_{R_1}}^2 + \left(\frac{\partial R_P}{\partial R_2}\right)^2 {u_{R_2}}^2} \cong 0{,}75\Omega$$

$$R_P = (16{,}67 \pm 0{,}75)\Omega$$

Utilizzando invece un resistore R1 più costoso i risultati cambiano come segue.

$R_S = (120{,}00 \pm 1{,}41)\Omega$
$R_P = (16{,}67 \pm 0{,}69)\Omega$

Si deduce che introducendo anche solo un resistore qualitativamente superiore, in questo caso con incertezza dieci volte inferiore, la misura migliore e risulta più precisa. In particolare il costo affrontato per l’acquisto del nuovo resistore è particolarmente conveniente nel caso della serie.

28. Si chiede di misurare indirettamente una velocità dati distanza percorsa dal corpo in esame e alcune rilevazioni di tempo impiegato a percorrere tale distanza. La distanza è affetta da incertezza mentre delle letture di tempo non si hanno altre informazioni. Tramite metodo probabilistico si calcola stima e incertezza di categoria sulle misure di tempo. Tramite il modello che lega la velocità a tempo e distanza se ne ricava la stima. Per la sua incertezza è necessario ipotizzare indipendenti le grandezze in gioco, tempo e spazio; le incertezze su distanza ud e tempo ut note; ud<<d e ut<<t; le derivate parziali della velocità rispetto al tempo e allo spazio finite e calcolabili.

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \cong 1{,}18s$$

$$u_t = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2} \cong 0{,}015s$$

$$\bar{V} = \frac{\bar{d}}{\bar{t}} \cong 0{,}85\,\frac{m}{s}$$

$$u_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 {u_t}^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial d}\right)^2 {u_d}^2} \cong 0{,}0105\,\frac{m}{s}$$

$$V = (0{,}8500 \pm 0{,}0105)\,\frac{m}{s}$$

29. Si chiede di valutare stima ed incertezza di una misura serie di misure dirette di diametro. La misura è affetta da un contributo di incertezza dovuto allo strumento ed ad un contributo dovuto alla temperatura. Si procede trovando la stima della misura e la sua incertezza di categoria A. Il contributo di categoria B dovuto allo strumento è già noto e dichiarato. Per trovare l'incertezza composta occorre mettere in quadratura non solo i contributi di categoria A e B ma anche quello relativo alla temperatura.

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \cong 10{,}0014mm$$

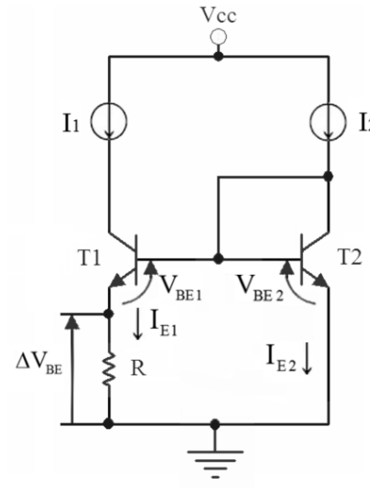
$$u_{d_A} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2} \cong 0{,}00022mm$$

$$u_d = \sqrt{{u_{d_A}}^2 + {u_{d_B}}^2 + {u_T}^2} \cong 0{,}0041mm$$

$$d = (10{,}0014 \pm 0{,}0041)mm$$

Esercizi relativi al capitolo 4

1. Considerata la seguente configurazione circuitale si rende necessario calcolare la differenza di potenziale ΔV_{BE} che si instaura ai capi di R a seguito della corrente che scorre nel ramo inferiore del circuito. I due generatori di corrente I_1 e I_2 erogano la stessa corrente di polarizzazione dei due transistor.



Analizzando il circuito si può notare che V_{BC} è 0 per entrambi i transistor T1 e T2 e β_F ha un valore molto elevato, per cui l'espressione del modello di Ebers-Moll [14] relativa alla corrente di emettitore diventa:

$$I_{E1} = I_{S1}\left[e^{\frac{V_{BE1}}{V_T}} - e^{\frac{V_{BC1}}{V_T}}\right] + \frac{I_{S1}}{\beta_F}\left[e^{\frac{V_{BE1}}{V_T}} - 1\right] = I_{S1}\left[e^{\frac{V_{BE1}}{V_T}} - 1\right] + \frac{I_{S1}}{\beta_F}\left[e^{\frac{V_{BE1}}{V_T}} - 1\right] \approx$$

$$\approx I_{S1}\left[e^{\frac{V_{BE1}}{V_T}} - 1\right]$$

In sintesi $I_{E1} \approx I_{C1}$.

Calcoli analoghi possono essere svolti per il secondo transistor, ottenendo:

$$I_{E2} \approx I_{S2}\left[e^{\frac{V_{BE2}}{V_T}} - 1\right]$$

In sintesi $I_{E2} \approx I_{C2}$

Impostando l'equazione alla maglia si ottiene ΔV_{BE} :

$$\Delta V_{BE} = V_{BE2} - V_{BE1} = V_T \, ln\left[\frac{I_{E2}}{I_{S2}} + 1\right] - V_T \, ln\left[\frac{I_{E1}}{I_{S1}} + 1\right]$$

Se utilizziamo un transistor T1 la cui sezione di giunzione base-emettitore è *N* volte quella di T2 ne consegue che $I_{S1} = NI_{S2}$:

$$\Delta V_{BE} = V_{BE2} - V_{BE1} = V_T \, ln\left(\frac{\frac{I_{E2}}{I_{S2}} + 1}{\frac{I_{E1}}{I_{S1}} + 1}\right) = V_T \, ln\left(\frac{I_{E2} + I_{S2}}{I_{S2}} \frac{I_{S1}}{I_{E1} + I_{S1}}\right) \approx$$

$$\approx V_T \, ln\left(\frac{NI_{E2}}{I_{E1}}\right) \approx V_T \, ln \, N = \frac{kT}{q} ln \, N$$

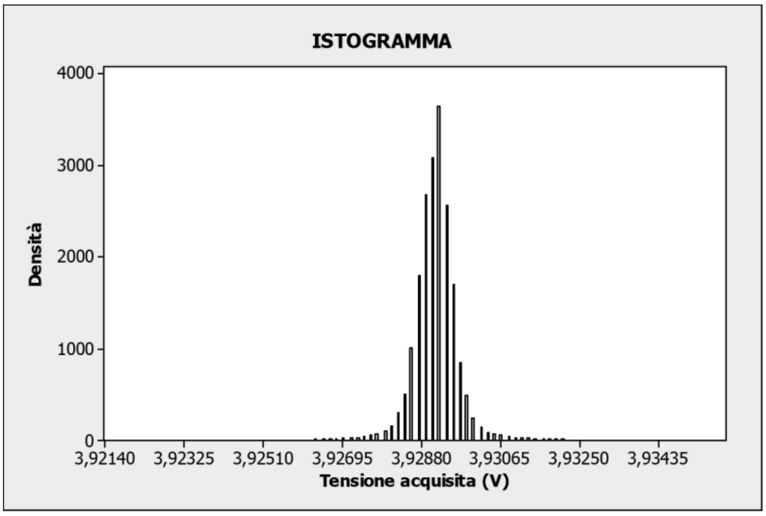
Espressione che evidenzia la relazione che intercorre tra temperatura assoluta espressa in gradi Kelvin e la variazione di tensione ai capi di *R*.

2. La fase di acquisizione di pochi secondi è usata per ridurre l'entità di tutte le potenziali cause di dispersione dei risultati, in particolare quella legata alla deriva termica dei dispositivi. Calcoliamo il valore atteso e l'incertezza tipo per la tensione:

$$E(V) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} V_i = \frac{1}{2525001}\sum_{i=1}^{2525001} V_i = 3.929130V$$

$$\sigma(V_A) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left[V_i - E(V)\right]^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{2525001}\left[V_i - 3.929130\right]^2}{2525001 - 1}} = 540\mu V$$

$$u(V_A) = \frac{\sigma(V_A)}{\sqrt{N}} = 0.340 \, \mu V$$



Rappresentazione discreta della PDF dei dati acquisiti.

L'incertezza di categoria B, alla luce della portata utilizzata, di (4.29), (4.30), (4.28) e delle tabelle NI riportate in appendice, può essere ricavata con i seguenti passaggi:

$$k_{e1} = 70\,ppm + 13\frac{ppm}{°C}\cdot(1°C) + 1\frac{ppm}{°C}\cdot(1°C) = 84\,ppm$$

$$k_{e2} = 20\,ppm + 60\,ppm + 21\frac{ppm}{°C}\cdot(1°C) = 101\,ppm$$

$$Accuracy = \pm\left(3.929130\cdot 84\;ppm + 5\cdot 101\;ppm + \frac{140\cdot 10^{-6}}{\sqrt{100}}\cdot 3\right) = \pm 877\mu V$$

$$Accuracy = \pm 877\mu V$$

Supponendo la distribuzione di probabilità di tipo uniforme, il valore assoluto dell'incertezza è:

$$u(V_B) = \frac{accuracy}{\sqrt{3}} = 506\,\mu V$$

L'incertezza globale sulla tensione acquisita risulta pertanto:

$$u(V) = \sqrt{u^2(V_A) + u^2(V_B)} \approx u(V_B) = 506\mu V$$

Per il calcolo dell'incertezza tipo si utilizzano i dati riportati nel testo dell'esercizio, ripresi dal manuale del costruttore[1]:

$$Accuracy = \pm\left(0.010\ \%\ reading + 0.001\ \%\ range\right)$$

$$Accuracy = \pm\left(11.9006 + 10\right) = \pm 0.022\ k\Omega$$

Assumendo anche in questo caso una distribuzione uniforme dei valori, $u(R)$ si ricava nel seguente modo:

$$u\left(R\right) = \frac{Accuracy}{\sqrt{3}} = 0.013\ k\Omega$$

Adesso possiamo calcolare la potenza dissipata:

$$\overline{P} = \frac{\overline{V}^2}{R} = \frac{3.929130^2}{119006} = 129.725\mu W$$

Dalla (3.22) si ottiene l'incertezza composta nel caso di grandezze di ingresso indipendenti:

$$u\left(P\right) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2 u^2\left(x_i\right)} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)^2\Bigg|_{E(V),R} \cdot u^2\left(V\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial R}\right)^2\Bigg|_{E(V),R} \cdot u^2\left(R\right)} =$$

$$= \sqrt{K_{s1}^2\left(506\cdot 10^{-6}\right)^2 + K_{s2}^2\left(0.013\cdot 10^3\right)^2} = 0.036\mu W$$

in cui K_{S1} e K_{S2} identificano il valore assunto dai coefficienti di sensibilità del modello nei valori attesi delle grandezze *V* e *R*.
Volendo determinare l'intervallo di incertezza per un dato livello di confidenza, si rende necessario calcolare i gradi di libertà effettivi della PDF di uscita, avvalendosi nuovamente della (3.39) :

[1] Il costruttore specifica inoltre che i valori della formula si riferiscono all'uso della quinta portata (1MΩ) ed a misure effettuate entro un anno dopo l'ultima calibrazione, con temperatura del dispositivo tra 18°C e 28°C.

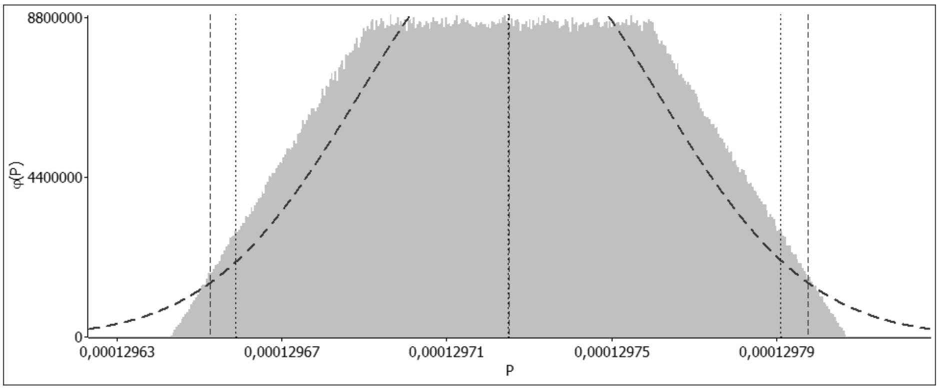
$$\nu_{effP} = \frac{u^4(P)}{\sum_{i=1}^{2} \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x_i} u(x_i)\right)^4}{\nu_i}} = \frac{u^4(P)}{\frac{\left(\frac{2V}{R} u_V\right)^4}{\nu_V} + \frac{\left(\frac{V^2}{R^2} u_R\right)^4}{\nu_R}} \approx$$

$$\approx \frac{u^4(P)}{\frac{\left(\frac{2V}{R} u_{V_B}\right)^4}{\nu_{V_B}} + \frac{\left(\frac{V^2}{R^2} u_R\right)^4}{\nu_R}} \approx \infty$$

Quindi ipotizzando la PDF di uscita gaussiana, si può calcolare l'incertezza estesa per un livello di confidenza del 95 % usando i quantili della distribuzione normale:

$$P = \overline{P} \pm U(P) = \overline{P} \pm 1.96\, u(P) = (129.725 \pm 0.071)\,\mu W$$

Adesso stimiamo la dissipazione di potenza sul resistore mediante simulazione MCM con GUM Workbench. Nell'area budget inseriamo le incertezze di tipo B per entrambe le variabili in ingresso al modello, che nel nostro caso sono le uniche influenti:



Le linee rosse (più esterne) delimitano l'intervallo di confidenza del 95 % per PDF gaussiana, le blu (più interne) localizzano l'intervallo del 95 % determinato tramite analisi non parametrica della PDF di uscita (di tipo trapezoidale). Riportiamo i valori che ci fornisce GUM Workbench:

Mean Value: 129.725 μW
Standard Uncertainty: 0.036 μW
Coverage Interval (p=0.9545): [129.659, 129.791] μW
Expanded Uncertainty Interval (p=0.9545): (+0.066, -0.066) μW
Number of Monte Carlo Trials: 2 000 000

3. Avremo che: $d = v \cdot t$, $\bar{t} = 200\,ms$ e dunque $\bar{d} = \bar{v} \cdot \bar{t} = 110\,m$;
   Per valutare l'incertezza valutiamo dapprima quella relativa a *t*, di categoria A, che vale, in forma assoluta e relativa:

$$u_t = \sqrt{\frac{1}{5}\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}\left(t_i - \bar{t}\right)^2} = 1.84 \cdot 10^{-3}\,s\,, \qquad u_t' = \frac{1{,}84}{200} = 0.0092$$

   Le incertezze relative per la velocità e per l'invecchiamento del sensore valgono rispettivamente:

$$u_v' = \frac{1}{550} = 0.00\overline{18}\,, \qquad u_i' = 0.01$$

   Avremo dunque, ipotizzando le misure dirette indipendenti tra loro e per quanto sostenuto nel paragrafo 3.3.2 che:

$$u_d' = \sqrt{\left(u_t'\right)^2 + \left(u_v'\right)^2 + \left(u_i'\right)^2} \approx 1 \cdot 10^{-2}\,; \qquad u_d \approx 1\,m$$

   E dunque:

$$d \approx \left(110 \pm 1\right) m \approx \left(110\,m \pm 1\%\right)$$

4. In entrambi i casi avremo che le incertezze assolute valgono:

$$u_1 = \left(0.01\right) \cdot 9900 = 99\,\Omega\,; \qquad u_2 = \left(0.01\right) \cdot 100 = 1\,\Omega$$

   Ipotizzando le misure di R_1 e R_2 indipendenti tra loro avremo per la (3.19):

$$K_1 = \left(0.01 \pm 14 \cdot 10^{-5}\right); \qquad K_2 = \left(0.99 \pm 14 \cdot 10^{-5}\right)$$

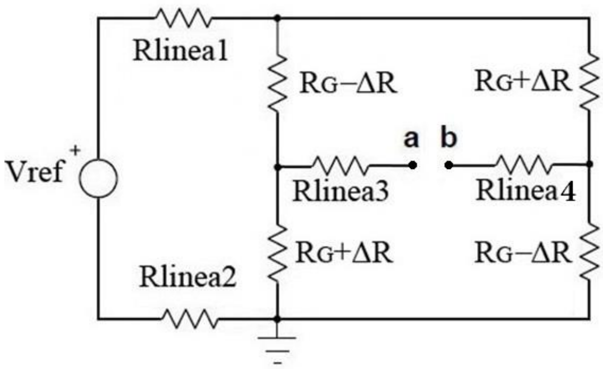
5. Si chiede di determinare l'espressione al secondo ordine di una termoresistenza RTD (Pt100) noti alcuni valori di resistenza per determinate temperature. Si procede ricordando il modello del sensore e risolvendo un sistema a due incognite e due equazioni. Le due equazioni sono il modello del sensore al quale è stato sostituito di volta in volta resistenza e temperature note; le due incognite sono i coefficienti α_1 e α_2. Per poter risolvere il sistema si ipotizza la temperatura di riferimento a 0°C, come indicato nel testo, per la quale si ha $R_0 = 100\Omega$.

$$R = R_0[1 + \alpha_1(T - T_0) + \alpha_2(T - T_0)^2]$$

$$\begin{cases} 220{,}3 = 100[1 + \alpha_1(50 - 0) + \alpha_2(50 - 0)^2] \\ 237{,}8 = 100[1 + \alpha_1(100 - 0) + \alpha_2(100 - 0)^2] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0{,}03434°C^{-1} \\ \alpha_2 = -0{,}0002056°C^{-1} \end{cases}$$

6. La risoluzione dell'esercizio può essere svolta utilizzando il metodo di calcolo già adottato nell'esempio visto nel paragrafo relativo ai tipi di condizionamento dei segnali provenienti dai trasduttori e facendo alcune considerazioni di carattere applicativo che possono rendere più verosimile l'analisi.
Nel caso della configurazione a ponte intero si può supporre che i 4 estensimetri siano posizionati vicini tra loro e in direzione longitudinale alla sollecitazione mentre la stazione di alimentazione e misura sarà posta a notevole distanza. In tal caso lo schema dei collegamenti sarà:



Possiamo osservare che è stata scelta una configurazione in cui 2 estensimetri funzionano in trazione e 2 in compressione, posti in modo complementare. Calcoliamo la tensione V_{ba} pre e post sollecitazione considerando *Rlinea1* = *Rlinea2* = R_l poiché i cavi di collegamento sono dello stesso materiale e della medesima lunghezza ed inoltre nei rami in cui figurano *Rlinea3* e R_l R_l , *Rlinea4* non c'è passaggio di corrente (resistenza elevata dello strumento di misura):

$$V_{barip} = \left(\frac{V_{ref}}{2R_l + 2R_G} (R_l + R_G) - \frac{V_{ref}}{2R_l + 2R_G} (R_l + R_G) \right) = 0$$

$$V_{basol} = \left(\frac{V_{ref}}{2R_l + 2R_G} (R_l + R_G - \Delta R) - \frac{V_{ref}}{2R_l + 2R_G} (R_l + R_G + \Delta R) \right) = -\frac{\Delta R}{R_l + R_G} V_{ref}$$

posto:

$$V_r = \frac{V_{basol} - V_{barip}}{V_{ref}}$$

$$\Delta R = \varepsilon\, GF\, R_G$$

si ha:

$$V_r = \frac{V_{basol} - V_{barip}}{V_{ref}} = -\frac{\Delta R}{R_l + R_G}$$

$$\varepsilon = -\frac{V_r(R_l + R_G)}{GF\ R_G}$$

che nel caso di resistenza dei collegamenti trascurabile $\left(R_l = 0\right)$ diventa la (4.26):

$$\varepsilon = -\frac{V_r}{GF}$$

7. Si misuri il valore efficace della tensione in uscita al giunto freddo di una termocoppia ideale (b=0).
   Dati i 5 valori rilevati riguardo la differenza di temperatura tra i giunti, la relazione che li lega alla stima è la media aritmetica.

   $$\overline{\Delta T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta T_i \cong 101°C$$

   L'incertezza assoluta su tale stima si calcola come radice della miglior stima della varianza. E' un incertezza di categoria A poiché dedotta, in mancanza di altre informazioni, necessariamente attraverso valutazioni di tipo statistico.

   $$u_{\Delta T} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\Delta T_i - \overline{\Delta T})^2} \cong 1{,}14°C$$

   Il coefficiente di sensibilità α è noto ed affetto da incertezza, e corrisponde al coefficiente Seebeck tipico di questa coppia bimetallica. Entrambi i fattori che compaiono del modello di questa termocoppia sono affetti da incertezza quindi, per quello che riguarda la stima della tensione ai capi dei giunti, vale la seguente equazione approssimata (termocoppia ideale).

   $$\overline{\Delta V} = \alpha(\Delta T) + \beta(\Delta T)^2 + o[(\Delta T)^2] \cong \alpha(\overline{\Delta T}) \cong 4545\mu V$$

   Mentre per quello che riguarda l'incertezza occorre fare le dovute ipotesi prima di passare al calcolo tramite derivate parziali. ΔT e α grandezze indipendenti; u_α e $u_{\Delta T}$ note; derivate parziali di ΔV rispetto a ΔT e α, sempre finite e calcolabili.

$$u_{\Delta V} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha}\right)^2 u_\alpha{}^2 + \left(\frac{\partial \Delta V}{\partial \Delta T}\right)^2 u_{\Delta T}{}^2} \cong 508\mu V$$
$$\Delta V = (4545 \pm 508)\ \mu V$$

8. Si determini il valore e l'incertezza della serie e del parallelo di due resistori uguali. Procedendo per ordine la stima della serie risulta essere la somma delle resistenze. Riguardo all'incertezza si ha a disposizione il solo valore di accuratezza sulla misura dei singoli resistori. Siamo in presenza di un'incertezza di categoria B, in quanto è il testo stesso che indica l'accuratezza percentuale con la quale viene dichiarata tale misura. In mancanza di altre informazioni si deve comunque indicare in che misura quel valore di resistenza si avvicina alla realtà e per fare questo lo ipotizzo distribuito in maniera uniforme nell'intervallo indicato dall'accuratezza.

$$R_S = R_1 + R_2 = 2M\Omega$$
$$u_{R_1} = u_{R_2} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cong 5773{,}51\Omega$$

Ipotizzando R_1 e R_2 indipendenti, con u_{R1} e u_{R2} note, con $u_{R1} \ll R_1$ e $u_{R2} \ll R_2$, con le derivate parziali di R_S rispetto a R_1 e R_2 finite e calcolabili, si trova l'incertezza sulla serie dei resistori. In questo caso le derivate parziali hanno valore unitario e il calcolo si semplifica.

$$u_{R_S} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_S}{\partial R_1}\right)^2 u_{R_1}{}^2 + \left(\frac{\partial R_S}{\partial R_2}\right)^2 u_{R_2}{}^2} = \sqrt{u_{R_1}{}^2 + u_{R_2}{}^2} \cong 8164{,}97\Omega$$
$$R_S = (2000 \pm 8)k\Omega$$

Per il parallelo si procede allo stesso modo, facendo attenzione al modello che individua appunto il parallelo tra due resistori di ugual valore e facendo attenzione al fatto che, questa volta, le derivate parziali non sono unitarie. Rimango valide e devono essere sempre dichiarate le ipotesi d'indipendenza di R_1 e R_2 , u_{R1} e u_{R2} note, $u_{R1} \ll R_1$ e $u_{R2} \ll R_2$, le derivate parziali di R_P rispetto a R_1 e R_2 finite e calcolabili.

$$\overline{R_P} = \frac{\overline{R_1}\,\overline{R_2}}{\overline{R_1} + \overline{R_2}} = 0,5M\Omega$$
$$u_{R_P} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_P}{\partial R_1}\right)^2 {u_{R_1}}^2 + \left(\frac{\partial R_P}{\partial R_2}\right)^2 {u_{R_2}}^2} \cong 2041,24\Omega$$
$$R_P = (500 \pm 2)k\Omega$$

Nell'esercizio si chiede inoltre di valutare la stima e l'incertezza del rapporto di attenuazione k ottenuto da un partitore di tensione realizzato con le due resistenze. Essendo uguali le resistenze il partitore così realizzato dimezza la tensione in ingresso. La sua stima quindi è un mezzo mentre la sua incertezza è legata alla relazione che lo costituisce nel partitore. Il calcolo dell'incertezza è legato alle ipotesi fatte in precedenza: indipendenza di R_1 e R_2 , u_{R1} e u_{R2} note, $u_{R1} \ll R_1$ e $u_{R2} \ll R_2$, derivate parziali di k rispetto a R_1 e R_2 finite e calcolabili.

$$V_2 = \frac{V_1 R_1}{R_1 + R_2}$$
$$\bar{k} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\overline{R_1}}{\overline{R_1} + \overline{R_2}} = 0,5$$
$$u_{\mathrm{k}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathrm{k}}{\partial R_1}\right)^2 {u_{R_1}}^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{k}}{\partial R_2}\right)^2 {u_{R_2}}^2} \cong 0,002$$
$$k = (0,500 \pm 0,002)$$

9. Mediante multimetro numerico si esegua una lettura della resistenza di un termistore noti la sua relazione, resistenza e temperatura di riferimento, coefficiente Seebeck e condizioni ambientali di contorno. Si indichi stima e incertezza assoluta e relativa. Il valore di resistenza di riferimento R_0 è affetto da incertezza assoluta, mentre quello del coefficiente α da incertezza relativa. Il valore della temperatura di riferimento è invece indicato con incertezza trascurabile. Il termometro digitale con il quale viene rilevata la temperatura ambiente, da inserire poi nella relazione del termistore, è corredato di indicazione sulla risoluzione.
   Prima di tutto occorre lavorare sul valore di incertezza di α e su quello di

risoluzione del termometro. In particolare l'incertezza su α va portata in assoluta mentre, in mancanza di altre indicazioni, la risoluzione del termometro digitale viene considerata corrispondente all'accuratezza e, quest'ultima, valutata come distribuita uniformemente.

$$u_T = \frac{a}{\sqrt{3}} \cong 0{,}58°C$$
$$u_\alpha = \frac{2}{100}\bar{\alpha} = 0{,}001°C^{-1}$$

A questo punto per calcolare la stima della resistenza ci si può avvalere del modello del termistore già indicato. Per la sua incertezza invece si ricorre alle derivate parziali, indicando sempre le dovute ipotesi. R_0, α e T devono essere indipendenti; u_{R0}, u_α, u_T, note; ; $u_{R0} \ll R_0$, $u_\alpha \ll \alpha$, $u_T \ll T$; le derivate parziali di R rispetto a R_0, α e T devono essere finite e calcolabili.

$$u_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial R_0}\right)^2 u_{R_0}{}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \alpha}\right)^2 u_\alpha{}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial T}\right)^2 u_T{}^2} \cong 4{,}041\Omega$$
$$R = (200 \pm 4)\Omega$$
$$R = 200 \pm 2\%$$

Dai risultati si deduce che il contributo che porta maggiore incertezza e che quindi pesa di più sul risultato finale della misura è quello relativo all'incertezza sulla temperatura, eseguita con il termometro digitale. Per ottimizzare il risultato occorre impiegare un termometro con una maggiore risoluzione.

10. Si valuti la tensione V_1, con stima ed incertezza, relativa al potenziometro rappresentato. Per quello che riguarda la descrizione del suo funzionamento si rimanda al testo di riferimento. Sono noti la tensione di alimentazione V relativa allo spostamento massimo L_1+L_2 (valore di fondo scala) e lo spostamento L_1 relativo al valore incognito di tensione V_1. Il potenziometro é un dispositivo con cursore mobile e in questa configurazione fissa funziona come un partitore di tensione. Il resistore che lo compone può essere visto come la somma di due resistori in serie sui quali vengono prelevate due tensioni, che cambiano in base alla posizione del cursore di prelievo. Essendo resistività e sezione del conduttore la medesima per tutta la sua lunghezza,il

partitore può essere riportato in funzione della lunghezza, o meglio della posizione, alla quale viene effettuato il prelievo di tensione.

$$V_1 = V\frac{R_1}{R_1 + R_2} = V\frac{L_1}{L_1 + L_2}$$
$$R_1 = \frac{\rho L_1}{s};\ R_2 = \frac{\rho L_2}{s}$$

Per il calcolo dell'incertezza devono sempre essere descritte le condizioni che la rendono calcolabile, ovvero u_V nota, $u_V \ll V$, la derivata parziale di V_1 rispetto a V finita e calcolabile.

$$u_{V_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial V_1}{\partial V}\right)^2 u_V{}^2} \cong 0{,}00024V$$
$$V_1 = (354{,}96 \pm 0{,}24)mV$$

11. Di una termocoppia sono dati il valore del coefficiente α e una tabella indica 10 letture di temperatura (5 letture di T_1 e 5 letture di T_2) relative al giunto freddo e al giunto caldo. Si vuole determinare l'incertezza estesa nella misura della tensione tra i giunti V_u (con k=1 e α noto). Si chiede di risolvere l'esercizio in due modi.

    Primo metodo di risoluzione.
    Per ogni coppia di temperature date si calcola la loro differenza ΔT_i. Dalle cinque differenze ricavate se ne trova la stima e l'incertezza tramite il metodo probabilistico. Queste poi si utilizzeranno nel modello della termocoppia per risalire a V_u.

$$\overline{\Delta T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta T_i \cong 294{,}7°C$$
$$u_{\Delta T} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n} (\Delta T_i - \overline{\Delta T})^2} \cong 0{,}084°C$$
$$V_u = \alpha\overline{\Delta T} \cong 0{,}013V$$

L'espressione dell'incertezza è valida nell'ipotesi di $u_{\Delta T}$ nota, $u_{\Delta T} \ll \Delta T$

e derivata parziale di V_u rispetto a ΔT finita e calcolabile. Si ricordi che il valore dell'incertezza deve essere alla fine espresso come valore esteso U_{Vu}.

$$u_{\mathrm{V}_u} = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathrm{V}_u}{\partial \Delta T}\right)^2 u_{\Delta T}{}^2} = 3{,}76\mu V$$
$$U_{V_u} = u_{\mathrm{V}_u} k = u_{\mathrm{V}_u}$$
$$V_u \cong (13261{,}5 \pm 3{,}8)\mu V$$

Secondo metodo di risoluzione.
Si calcola la tensione in uscita dal sensore inserendo nel modello la media della temperatura del giunto caldo e del giunto freddo. Per l'incertezza si ricorre all'espressione nella quale compaiono le derivate parziali della tensione rispetto alle due temperature, note le loro incertezze u_{T1} e u_{T2}, $u_{T1} << T_1$, $u_{T2} <<< T_2$, finite e calcolabili le suddette derivate.

$$\overline{T_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_{1_i} \cong 25{,}5°C$$
$$u_{T_1} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(T_{1_i} - \overline{T_1}\right)^2} \cong 0{,}045°C$$
$$\overline{T_2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_{2_i} \cong 320{,}2°C$$
$$u_{T_2} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(T_{2_i} - \overline{T_2}\right)^2} = 0{,}1°C$$
$$\overline{V_u} = \alpha(\overline{T_2} - \overline{T_1}) = 13261{,}5\mu V$$
$$u_{V_u} = \sqrt{\left(\frac{\partial V_u}{\partial T_1}\right)^2 u_{T_1}{}^2 + \left(\frac{\partial V_u}{\partial T_2}\right)^2 u_{T_2}{}^2} \cong 4{,}93\mu V$$
$$V_u = (13261{,}50 \pm 4{,}93)\mu V$$

Utilizzando il primo metodo si ottiene un'incertezza minore poiché il risultato è affetto da un solo contributo d'incertezza, legato alla differenza delle temperature. Con il secondo metodo invece ci sono due contributi, ognuno legato all'incertezza su ogni temperatura.

12. Si richiede di valutare l'incertezza con due cifre decimali di una misura di resistenza e resistività effettuata con un sensore ad effetto termoresistivo. Si sceglie ad esempio il seguente modello:

$$R = R_0 e^{\beta\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)}$$

Sono date dieci misure di temperatura delle quali sarà necessario trovare stima ed incertezza tramite metodo probabilistico. Non avendo altre informazioni al riguardo si considera l'incertezza di categoria A, ricavata tramite metodo probabilistico, come unica fonte di incertezza presente. Si ipotizza quindi nota u_T, $u_T \ll T$ e la derivata parziale della resistenza rispetto alla temperatura finita e calcolabile.

$$\bar{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i = 52{,}04°C$$

$$u_{T_A} = u_T = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(T_i - \bar{T})^2} \cong 0{,}05°C$$

$$u_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial T}\right)^2 {u_T}^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial T} = R_0 e^{\beta\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)}\left(-\frac{\beta}{T^2}\right)$$

$$u_R = \sqrt{\left[R_0 e^{\beta\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)}\left(-\frac{\beta}{T^2}\right)\right]^2 {u_T}^2}$$

13. Sono date sei rilevazioni di temperatura di un gas attraverso una termocoppia. Rimandando al testo di riferimento per la descrizione del sensore e delle sue caratteristiche metrologiche, si chiede di determinarne la sensibilità.
Per il calcolo della sensibilità occorre rapportare tra di loro grandezza in

uscita e grandezza in ingresso, che sono evidentemente tensione e temperatura. Si può procedere calcolando le rispettive cinque sensibilità e se ne stima il valore (con relativa incertezza) attraverso il metodo probabilistico.
Si noti che nella tabella delle rilevazioni si ha un solo valore di temperatura, nonostante nel modello di una termocoppia se ne richiedono due. Osservando la tabella, a 0°C si ha una tensione di 0,000 mV, il che significa che possiamo ipotizzare la temperatura al giunto freddo corrispondente a 0°C. Si deduce che le temperature mostrate sono le ΔT necessarie al calcolo della sensibilità. Inoltre è importante considerare che la terza riga della tabella è da considerarsi puramente indicativa ma necessaria per individuare la temperatura del giunto freddo. Per il calcolo della stima e dell'incertezza della sensibilità si valuterà solo i cinque valori (n=5) significativi.

$$S_i = \frac{\Delta V_i}{\Delta T_i}$$
$$\bar{S} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i \cong 50{,}546\ \mu V\ °C^{-1}$$
$$u_S = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(S_i - \bar{S})^2} \cong 0{,}027\ \mu V\ °C^{-1}$$

14. Date le caratteristiche di un sensore a termocoppia e di uno a termoresistore si chiede di ricavare alcuni valori a partire dalla relazione che li caratterizza. Della termocoppia si chiede di ricavare la temperatura del giunto caldo mentre del termoresistore si chiede di ricavare la sua resistenza ad una determinata temperatura e, viceversa, una temperatura a partire da una resistenza. Inoltre si chiede di valutare l'incertezza su quest'ultimo punto, sapendo quanto vale quella relativa sulla resistenza di riferimento. Noti i modelli dei due sensori in esame si possono individuare le equazioni necessarie alla risoluzione dell'esercizio, basta fare attenzione ad inserire i giusti riferimenti di temperatura e resistenza quando richiesti.

$$\Delta \mathrm{V} = \alpha(T_2 - T_1)$$
$$\overline{T_2} = \frac{\Delta \mathrm{V} + \alpha T_1}{\alpha} = T_{GC} \cong 418{,}55°C$$

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)] = 280{,}32\Omega$$

$$T = \frac{R - R_0}{R_0\alpha} \cong 85{,}46°C$$

Per trovare l'incertezza u_T su quest'ultima misura, riportando in assoluta l'incertezza relativa u_{R0} indicata sulla resistenza di riferimento R_0, occorre ipotizzare anche u_{R0} nota, $u_{R0} << R_0$ e che la derivata parziale di T rispetto a R_0 sia finita e calcolabile.

$$u_T = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial R_0}\right)^2 {u_{R_0}}^2} \cong 0{,}34°C$$

$$T = (85{,}46 \pm 0{,}34)°C$$

Per quello che riguarda la descrizione di pregi, difetti, caratteristiche e differenze tra i due sensori si rimanda al testo di riferimento.

15. Dato il modello di un trasduttore a induzione elettromagnetica, noti campo magnetico, lunghezza del conduttore e note alcune misure di corrente effettuate su di esso, si chiede di determinare la forza alla quale è sottoposto il conduttore. Dalle sette letture di corrente a disposizione si ricava la loro stima ed incertezza attraverso il modello probabilistico. Tale incertezza è composta anche da una componente di categoria B, dovuta all'accuratezza dichiarata dello strumento di misura, che andrà sommata in quadratura a quella di categoria A. Dal modello del sensore è intuitivo ricavare il valore stimato della forza e della sua incertezza, ricordando di ipotizzare u_I nota, $u_I << I$ e la derivata parziale di F rispetto a I finita e calcolabile.

$$\bar{I} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_i = 3A$$

$$u_{I_A} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(I_i - \bar{I})^2} \cong 0{,}01A$$

$$u_{T_B} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cong 0{,}043A$$

$$u_I = \sqrt{{u_{I_A}}^2 + {u_{I_B}}^2} \cong 0{,}044A$$

$$I = (3{,}000 \pm 0{,}044)A$$

$$\bar{F} = \bar{B}\,\bar{l}\,\bar{I} = 0{,}015N$$

$$u_F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial I}\right)^2 {u_I}^2} \cong 0{,}00022N$$

$$F = (15{,}00 \pm 0{,}22)mN$$

Si rimanda al testo di riferimento per quello che riguarda la spiegazione del funzionamento di tale sensore.

16. Si richiede la valutazione di stima ed incertezza della resistenza in uscita da un termistore, noti costante dimensionale e resistenza di riferimento (con una sua incertezza), a partire da dieci rilevazioni di temperatura. Tramite metodo probabilistico si possono ricavare stima ed incertezza delle misure di temperatura. Dall'incertezza relativa si ricava l'assoluta, per quello che riguarda la resistenza di riferimento. Infine, ricordando il modello del termistore, si ricava stima e incertezza della resistenza in uscita. Si ricordi di ipotizzare u_{R0} nota, $u_{R0} << R_0$ e la derivata parziale di R rispetto a R_0 finita e calcolabile.

$$\bar{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i = 25{,}17°C$$

$$u_T = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(T_i - \bar{T})^2} \cong 0{,}138°C$$

$$\bar{R} = \overline{R_0}e^{k\left(\frac{1}{T}\right)} \cong 874{,}045\Omega$$

$$u_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial R_0}\right)^2 {u_{R_0}}^2} \cong 8{,}74\Omega$$

$$R = (874{,}05 \pm 8{,}74)\Omega$$

Per la caratterizzazione metrologica del sensore si rimanda al testo di riferimento.

17. Siamo dati due resistori campioni di stesso valore (e stessa incertezza su tale valore), si stimi la misura con incertezza della loro serie, del loro parallelo e del rapporto di attenuazione che si otterrebbe utilizzandole come partitore di tensione. Si procede per ordine iniziando dalla serie. Per l'incertezza su di essa di ipotizzano le due grandezze indipendenti, note le loro incertezze u_{R1} e u_{R2}, $u_{R1} << R_1$ e $u_{R2} << R_2$, finite e calcolabili le derivate parziali di R_S (serie) rispetto a R_1 e R_2.

$$\overline{R_S} = \overline{R_1} + \overline{R_2} = 2000\Omega$$
$$u_{R_S} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_S}{\partial R_1}\right)^2 {u_{R_1}}^2 + \left(\frac{\partial R_S}{\partial R_2}\right)^2 {u_{R_2}}^2} \cong 0{,}14\Omega$$
$$R_S = (2000{,}00 \pm 0{,}14)\Omega$$

Stessa procedura per il parallelo, cambia il modello e la forma delle ipotesi: le due grandezze devono essere indipendenti, devono essere note le loro incertezze u_{R1} e u_{R2}, $u_{R1} << R_1$ e $u_{R2} << R_2$, finite e calcolabili le derivate parziali di R_P (parallelo) rispetto a R_1 e R_2.

$$\overline{R_P} = \frac{\overline{R_1}\,\overline{R_2}}{\overline{R_1} + \overline{R_2}} \cong 500\Omega$$
$$u_{R_P} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_P}{\partial R_1}\right)^2 {u_{R_1}}^2 + \left(\frac{\partial R_P}{\partial R_2}\right)^2 {u_{R_2}}^2} \cong 0{,}35\Omega$$
$$R_P = (500{,}00 \pm 0{,}35)\Omega$$

Dopo aver ricavato il modello del coefficiente di attenuazione K si procede con il calcolo delle derivate parziali al fine di trovare l'incertezza su tale stima. Si ipotizzano indipendenti le grandezze R_1 e R_2, note le loro incertezze u_{R1} e u_{R2}, $u_{R1} << R_1$ e $u_{R2} << R_2$, finite e calcolabili le derivate parziali di K rispetto a R_1 e R_2.

$$\bar{k} = \frac{\overline{R_2}}{\overline{R_1} + \overline{R_2}} \cong 0{,}50$$
$$u_k = \sqrt{\left(\frac{\partial K}{\partial R_1}\right)^2 {u_{R_1}}^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial R_2}\right)^2 {u_{R_2}}^2} \cong 0{,}000035$$
$$k = (0{,}500000 \pm 0{,}000035)\Omega$$

18. Si richiede di valutare quale tra due multimetri digitali è il più accurato, in base ai dettagli dati. Con esso si chiede di eseguire una misura di resistenza di un sensore ad effetto termoresistivo a temperatura data e, viceversa, ricavare una temperatura nota dalla resistenza in uscita.
Si inizia valutando quale dei due strumenti è il può accurato, o meglio quale dei due ha valore di accuratezza inferiore. Nel testo viene descritta una prova durante la quale tutti e due gli strumenti rilevano la stessa resistenza alla stessa temperatura di riferimento. Quel valore letto è da utilizzare come primo contributo (R_0) nel calcolo dell'incertezza. Il secondo contributo è diverso per ogni strumento. Nel primo strumento è legato al count, nel secondo al valore di fondo scale. Entrambi possono essere ricavati dal numero di cifre dalle quali è composto il display.
Nel dettaglio con 3,5 cifre il display dello strumento può eseguire fino a 1999 conteggi (circa 2000), che corrisponde al valore massimo che può indicare, quindi il fondo scala. Anche il count è legato a questo valore, poiché è il più piccolo valore che il display può indicare.

$$r = \frac{Vfs}{conteggi} = \frac{199{,}9}{1000} \cong 0{,}1 \left[\frac{\Omega}{conteggio}\right]$$
$$a_1 = \pm\left(\frac{\overline{R_0}}{100}0{,}05 + 1count\right) = 0{,}15\Omega$$
$$a_2 = \pm\left(\frac{\overline{R_0}}{100}0{,}05 + \frac{Vfs}{100}0{,}03\right) = 0{,}10997\Omega$$

Essendo $a_2<a_1$ lo strumento più accurato è il secondo. Scelto lo strumento se ne può adesso calcolare l'incertezza, ipotizzando una distribuzione uniforme, con il fine di avere tutto quello che serve per utilizzare il modello del termoresistore.
A questo punto si chiede di valutare la resistenza in uscita a fronte di una data temperatura. Si considerino le seguenti ipotesi: u_{R0} nota, $u_{R0}<<R_0$, derivata parziale di R rispetto ad R_0 finita e calcolabile.

$$\bar{R} = \overline{R_0}[1 + \bar{\alpha}(\bar{T} - \overline{T_0})] = 266{,}6\Omega$$
$$u_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial R_0}\right)^2 {u_{R_0}}^2} \cong 0{,}17\Omega$$
$$R = (266{,}66 \pm 0{,}17)\Omega$$

Adesso si procede per ricavare una temperatura a seguito di una determinata resistenza in uscita. Anche in questo caso, si considerino le seguenti ipotesi: u_{R0} nota, $u_{R0} \ll R_0$, derivata parziale di R rispetto ad R_0 finita e calcolabile.

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$
$$\bar{T} = \frac{\overline{R_T} - \overline{R_0} + \overline{R_0}\,\bar{\alpha}\,\overline{T_0}}{\overline{R_0}\,\bar{\alpha}} \cong 133{,}67°C$$
$$u_T = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial R_0}\right)^2 {u_{R_0}}^2} \cong 0{,}23°C$$
$$T = (133{,}67 \pm 0{,}23)°C$$

Per la descrizione dettagliata del funzionamento del sensore e delle sue caratteristiche metrologiche si rimanda al testo di riferimento.

19. Data una termocoppia si vuole ricavare la temperatura del giunto caldo, noti temperatura di riferimento al giunto freddo, tensione in uscita e coefficiente Seebeck. Dal modello di tale sensore si può ricavare il termine cercato. Occorre porre attenzione al fatto che sia la temperatura del giunto freddo che la tensione in uscita sono affetti da incertezza. Questo significa che una volta stimata la temperatura incognita, per trovare la sua incertezza occorre ipotizzare: tensione e temperatura al giunto freddo indipendenti; $u_{\Delta V}$ e u_{T1} note; $u_{\Delta V} \ll \Delta V$ e $u_{T1} \ll T_1$; derivata parziale di T_2 rispetto a ΔV e derivata parziale di T_2 rispetto a T_1 finite e calcolabili.

$$\Delta V = \alpha(T_2 - T_1)$$
$$\overline{T_2} = \frac{\overline{\Delta V} + \bar{\alpha}\,\overline{T_1}}{\bar{\alpha}} \cong 431{,}26°C$$
$$u_{T_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial T_2}{\partial \Delta V}\right)^2 {u_{\Delta V}}^2 + \left(\frac{\partial T_2}{\partial T_1}\right)^2 {u_{T_1}}^2} \cong 17{,}12°C$$
$$T_2 = (431{,}26 \pm 17{,}12)°C$$

Si rimanda al testo di riferimento per la descrizione dell’effetto Seebeck e delle caratteristiche metrologiche del sensore.

20. Dato un potenziometro si chiede di ricavare lo spostamento relativo ad un valore di resistenza dato, misurata con un multimetro numerico di accuratezza dichiarata. Noti la misura massima dello spostamento del cursore e il valore di fondo scala di resistenza si può ricavare lo spostamento chiesto, ricordando il principio di funzionamento del sensore.
    Il potenziometro funziona come un partitore di tensione nel quale resistività e sezione del conduttore rimangono costanti per tutta la sua lunghezza. In questo modo il partitore può essere riportato in funzione della lunghezza, o meglio della posizione, alla quale viene effettuata il prelievo di tensione.

$$V_1 = V\frac{R_1}{R_1 + R_2} = V\frac{L_1}{L_1 + L_2}$$
$$R_1 = \frac{\rho L_1}{s};\ R_2 = \frac{\rho L_2}{s}$$
$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{L_1}{L_1 + L_2}$$
$$\overline{L_1} = \overline{\frac{\overline{R_1}}{R_1 + R_2}}(\overline{L_1 + L_2}) = 2{,}998cm$$

In quest'ultima equazione R_1 corrisponde al valore misurato con il multimetro, la somma delle resistenze al valore di fondo scala e la somma delle lunghezze allo spostamento massimo del cursore. L'ultimo passaggio consiste nel ricavare le incertezze. Per la resistenza la sua indicazione sul multimetro indica già il count: l'indicazione 2,998KΩ significa che la più piccola quantità misurabile (il count) è 0,001KΩ, si tratta solo di valutarla distribuita uniformemente per trovarne l'incertezza. Per il fondo scala invece viene già fornita l'incertezza di tipo assoluto.

Ricordando che (L_1+L_2) è un valore e indicando (R_1+R_2) con R, si può impostare il calcolo di u_{L1} con le derivate parziali. Si ipotizza, ai fini del calcolo, R e R_1 indipendenti, u_{R1} e u_R note, $u_{R1} \ll R_1$, $u_R \ll R$, e le derivate parziali di L_1 rispetto a R_1 e R finite e calcolabili.

$$u_{R_1} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1count}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0{,}58\Omega$$

$$u_{L_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial L_1}{\partial R_1}\right)^2 {u_{R_1}}^2 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial \mathrm{R}}\right)^2 {u_{\mathrm{R}}}^2} \cong 0{,}65\mu m$$
$$L_1 = (2998{,}00 \pm 0{,}65)\mu m$$

Per la descrizione dettagliata del funzionamento del potenziometro e delle sue caratteristiche metrologiche si rimanda al testo di riferimento.

21. Un parallelo di due resistenze ha valore noto R_M. Nota anche una delle due resistenze che lo compongo (R_N) si vuol trovare il valore dell'altra resistenza in gioco R_X. I valori noti sono entrambi affetti da incertezza e della resistenza incognita si cerca sia stima che incertezza. Dall'equazione tipica di due resistenze in parallelo si può ricavare la stima dell'incognita. Note anche le incertezze delle grandezze in gioco è sufficiente impostare le ipotesi e procedere con il calcolo. R_N e R_M indipendenti, R_N e R_M note, $u_{RN} << R_N$ e $u_{RM} << R_M$, derivate parziali di R_x rispetto a R_N e R_M finite e calcolabili.

$$R_M = \frac{R_N R_X}{R_N + R_X}$$
$$R_X = \frac{R_N R_M}{R_N - R_M} = 995006\Omega \cong 996k\Omega$$
$$u_{R_X} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_X}{\partial R_N}\right)^2 {u_{R_N}}^2 + \left(\frac{\partial R_X}{\partial R_M}\right)^2 {u_{R_M}}^2} = 1407152{,}394\Omega \cong 1407k\Omega$$
$$\frac{\partial R_X}{\partial R_N} = \frac{-{R_M}^2}{(R_N - R_M)^2} = 994009\Omega$$
$$\frac{\partial R_X}{\partial R_M} = \frac{{R_N}^2}{(R_N - R_M)^2} = 996004\Omega$$
$$R_X = (995 \pm 1407)k\Omega$$

Un valore così insolito dell'incertezza deriva dal fatto che al denominatore delle derivate parziali (coefficienti di sensibilità) si ha un valore che assume valori molto piccoli rispetto al numeratore molto grande.

Soluzioni ad alcune delle prove di esame proposte su www.misureelettriche.unifi.it

Compito 6 Giugno 2012

Esercizio 1

Si chiede di valutare indirettamente la misura di un'accelerazione noti spazio percorso e tempo impiegato a percorrerlo. Dato il modello si ricava la stima. Per l'incertezza, essendo presente soltanto quella sul tempo, è necessario ipotizzare nota quest'ultima u_t, u_t<<t e la derivata parziale dell'accelerazione rispetto al tempo finita e calcolabile.

$$\bar{a} = \frac{2\bar{s}}{\bar{t}^2} \cong 9{,}802\,\frac{m}{s^2}$$
$$u_a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2 u_t^{\,2}} \cong 0{,}585\,\frac{m}{s^2}$$
$$a = (9{,}802 \pm 0{,}585)\,\frac{m}{s^2}$$
$$a = 9{,}802\,\frac{m}{s^2} \pm 5{,}85\%$$

Si chiede inoltre di rivalutare l'incertezza sull'accelerazione ipotizzando la misura distribuita in modo normale (tabella 2.1) con intervallo di confidenza del 99%.

$$\phi_x - (1 - \phi_x) = 0{,}99$$
$$\phi_x = 0{,}995$$

il valore che più si avvicina a 0,995 è 0,9949 per il quale si ha z = 2,576 = k
$U_a \cong u_a\, k \ \cong 1{,}507\ mA$

Nella seconda parte dell'esercizio di chiede di riportare alcune definizioni, per le quali si rimanda al testo di riferimento.

Esercizio 2

Nella figura è rappresentato un selettore di portata di un voltmetro analogico i cui resistori sono affetti da incertezza realizzativa nota. Inoltre è presente un microamperometro per la rilevazione della corrente che scorre nel circuito. Si chiede di determinare il fondo scala del microamperometro per avere sul voltmetro una portata minima di 1 V. Seguendo il percorso della corrente nel selettore occorre ricavare il suo valore ogni qual volta si cambia la posizione del cursore, utilizzando la legge di Ohm.

$$V = RI$$
$$1 = (R_1 + R_0)I_1 \rightarrow \overline{I_1} = \frac{1}{\overline{R_1} + R_0} = 10\ \mu A$$
$$\overline{I_2} = \frac{1}{\overline{R_2} + R_0} \cong 16{,}67\ \mu A$$
$$\overline{I_3} = \frac{1}{\overline{R_3} + R_0} = 50\ \mu A$$

Da questi risultati si nota che nella configurazione in cui compaiono in serie R_3 e R_0 si ha la maggior corrente nel circuito, imponendo la tensione ad 1V. Essendo il fondo scala dell'amperometro il massimo valore di corrente che può misurare senza alterare le sue caratteristiche, si deduce che $50\ \mu A$ è il risultato richiesto nella prima parte dell'esercizio. A questi risultati è necessario allegare le loro incertezze, per farlo occorre ipotizzare note u_{R1}, u_{R2} e u_{R3}; $u_{R1} \ll R_1$, $u_{R2} \ll R_2$ e $u_{R3} \ll R_3$; finite e calcolabili le derivate parziali della corrente rispetto alle singole resistenze.

$$u_{R_1} = 1\%\ \overline{R_1} = 9990\ \Omega$$
$$u_{R_2} = 1\%\ \overline{R_2} = 599\ \Omega$$
$$u_{R_3} = 1\%\ \overline{R_3} = 199\ \Omega$$

$$u_{I_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial I_1}{\partial R_1}\right)^2 {u_{R_1}}^2} \cong 1\ \ \mu A$$
$$u_{I_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial I_2}{\partial R_2}\right)^2 {u_{R_2}}^2} \cong 0{,}0017\ \mu A$$

$$u_{I_3} = \sqrt{\left(\frac{\partial I_3}{\partial R_3}\right)^2 {u_{R_3}}^2} \cong 0{,}5\ \mu A$$

$I_1 = (10\ \pm 1)\ \mu A$
$I_2 = (16{,}6700\ \pm 0{,}0017)\ \mu A$
$I_3 = (50{,}0\ \pm 0{,}5)\ \mu A$

Nella seconda parte si chiede di fare il contrario, dalla portata del microamperometro trovare le portate del voltmetro.

$V_1 = (R_1 + R_0)I_{fs} = 1\ V$
$V_2 = (R_2 + R_0)I_{fs} = 0{,}6\ V$
$V_3 = (R_3 + R_0)I_{fs} = 0{,}2\ V$

$$u_{V_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial V_1}{\partial R_1}\right)^2 {u_{R_1}}^2} \cong\ 0{,}1\ V$$

$$u_{V_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial V_2}{\partial R_2}\right)^2 {u_{R_2}}^2} \cong 0{,}006\ V$$

$$u_{V_3} = \sqrt{\left(\frac{\partial V_3}{\partial R_3}\right)^2 {u_{R_3}}^2} \cong 0{,}002\ V$$

$V_1 = (1{,}0 \pm 0{,}1)V$
$V_2 = (600\ \pm 6)mV$
$V_3 = (200\ \pm 2)mV$

<u>Esercizio 3</u>

Si chiede di valutare incertezza assoluta e relativa di una tensione utilizzando un multimetro digitale note le caratteristiche dello strumento. E' nota anche la tensione da misurare (V=1,5 V), la resistenza equivalente secondo il circuito di Thevenin ($R_{eq} = 10\ k\Omega$) e la resistenza interna dello strumento ($R_{in} = 5\ M\Omega$). Si procede calcolando l'accuratezza dello strumento, legata al valore letto e al fondo scala. Ipotizzando i valori distribuiti in maniera uniforme dall'accuratezza si passa all'incertezza.

Per la descrizione del circuito adottato e dello strumento si rimanda al testo di riferimento.

Nel circuito equivalente, costituito da un generatore di tensione V_s, un resistore R_{eq} che rappresenti l'impedenza equivalente ($10\ k\Omega$) e uno che rappresenti quella interna R_{in} dello strumento ($5\ M\Omega$). La tensione in ingresso allo strumento sarà pari a:

$$V_L = V_S \left(\frac{R_{in}}{R_{in} + R_{eq}} \right)$$

Essendo $R_{in} \gg R_{eq}$, la tensione misurata sarà di 1,497 V .

$$a = \pm\left(0{,}1\%\ V_l + 0{,}1\%\ V_{fs}\right) = \pm\left(\frac{1{,}497}{100}\,0{,}1 + \frac{1{,}999}{100}\,0{,}1\right) \cong \pm 3{,}496\ mV$$
$$u_V = \frac{a}{\sqrt{3}} \cong 2{,}018\ mV$$

$$V = (1497 \pm 2)mV$$
$$V = 1{,}497\ V\ \pm 13{,}5\%$$

Esercizio 4

Di un trasduttore si conosce la classe e la funzione di trasferimento H (che anche la sua sensibilità), che permette dall'ingresso T (temperatura) di ricavare l'uscita V (tensione). Inoltre è presente un blocco di amplificazione di guadagno G noto. Si chiede di calcolare incertezza assoluta e relativa dell'uscita, alla temperatura di 25 °C. E' noto il fatto che a 50 °C si ottiene il valore di fondo scala, quindi:

$$\overline{V_{fs}} = \bar{H}\ \bar{T}\ \bar{G} = 0{,}010\ (50)20 = 10\ V$$
$$\overline{V_{25°C}} = \bar{H}\ \bar{T}\ \bar{G} = 0{,}010\ (25)20 = 5\ V$$

$$T = \frac{V}{H\ G}$$

$$u'_T = \sqrt{{u'_H}^2 + {u'_G}^2 + {u'_V}^2}$$
$$u'_G = 0{,}02$$
$$u'_H = 0{,}02$$

$$u_V = \frac{c\ V_{fs}}{100} = 0{,}1\ V$$
$$u'_V = \frac{u_V}{V_{25°C}} = 0{,}02$$
$$u'_T = \sqrt{{u'_H}^2 + {u'_G}^2 + {u'_V}^2} = \sqrt{3}\ (0{,}02) = 0{,}035 = 3{,}5\%$$

$$u'_T = u'_T\bar{T} = 0{,}035\ (25) = 0{,}88\ °C$$

Per la classificazione dei sensori si rimanda al testo di riferimento.

Compito 17 Aprile 2012

Esercizio 1

Si chiede di valutare una misura di potenza dissipata su un resistore di valore nominare ed incertezza estesa noti, effettuata con metodi diversi da tre studenti diversi.
Il primo studente esegue una serie di letture ripetute di un wattmetro opportunamente collegato. In assenza di altre informazioni, tramite metodo probabilistico, è possibile ricavare stima ed incertezza di categoria A, note nel dettaglio tutte le letture.

$$\overline{P_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{1_i} = 25\ \mu W$$
$$u_{P_{1_A}} = u_{P_1} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(P_{1_i} - \overline{P_1}\right)^2} \cong 0{,}23\ \mu W$$
$$P_1 = (25{,}00 \pm 0{,}23)\mu W$$
$$P_1 = 25{,}00\mu\ W \pm 0{,}93\%$$

Il secondo studente rileva, con lettura unica, la corrente che attraversa il resistore, della quale si conosce la sua incertezza dichiarata, con intervallo di confidenza noto. L'intervallo di confidenza permette, leggendo la tabella 7.1 (distribuzione normale standardizzata), di ricavare il fattore di copertura k e l'incertezza assoluta sulla stima della corrente. Si tratta evidentemente d’incertezza di categoria B.

$\phi_x - (1 - \phi_x) = 0{,}95$
$\phi_x = 0{,}975$ per il quale si ha z = 1,96 = k
$u_I \cong 0{,}00102\ mA$

$I = (0{,}45000 \pm 0{,}00102) mA$

La stima della potenza si ricava poi dalla relazione che lega quest'ultima a corrente e resistenza. Per l'incertezza è necessario considerare indipendenti le grandezze in gioco (corrente e resistenza); note le loro incertezze u_I e u_R; $u_I \ll I$, $u_R \ll R$; le derivate parziali della potenza rispetto a corrente e tensione finite e calcolabili. Notare che l'incertezza sulla resistenza è nota in forma estesa e sarà necessario riportarla in assoluta prima di procedere al calcolo, noto il fattore di copertura k=3.

$$u_R = \frac{U_R}{k} = \frac{6}{3} = 2\ \Omega$$
$$R = (100 \pm 2)\Omega$$

$$\overline{P_2} = \bar{R}\bar{I}^2 = 20{,}25\ \mu W$$
$$u_{P_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial P_2}{\partial R}\right)^2 u_R{}^2 + \left(\frac{\partial P_2}{\partial I}\right)^2 u_I{}^2} \cong 0{,}42\ \ \mu W$$
$$P_2 = (20{,}25 \pm 0{,}42)\mu W$$
$$P_2 = 20{,}25\ \mu W\ \ \pm 2{,}05\%$$

Il terzo studente rileva invece, sempre con lettura unica, la tensione ai capi del resistore, conoscendo la portata del voltometro che utilizza e il numero di cifre che compone il suo display. In assenza si altre informazioni l'unico modo per ricavare l'incertezza su tale tensione letta è utilizzare le informazioni a disposizione. Dal numero di cifre che il display riesce ad indicare e dalla portata dello strumento si può ricavare la risoluzione r. Nel dettaglio con 3 cifre il display dello strumento può eseguire fino a 999 conteggi (circa 1000), che corrisponde al valore massimo che può indicare, quindi la portata (fondo scala Vfs). Il count è legato a questo valore, poiché è il più piccolo valore che il display può indicare. Ricordando la differenza tra accuratezza e risoluzione e la relazione che li lega, si può passare dall'accuratezza all'incertezza ipotizzando i valori distribuiti in maniera uniforme. Anche in questo caso si tratta d'incertezza di categoria B.

$$a = \pm(1count)$$
$$r = \frac{Vfs}{conteggi} = \frac{1}{1000} \cong 0{,}001 \left[\frac{\mathrm{V}}{conteggio}\right]$$
$$u_V = \frac{r}{\sqrt{12}} \cong 0{,}29\ mV$$

Utilizzando poi il modello che lega resistenza e tensione alla potenza se ne ricava la stima. Per l'incertezza è anche in questo caso necessario ipotizzare indipendenti le due grandezze tensione e resistenza; note le loro incertezze u_V e u_R; u_V<<V e u_R<<R; le derivate parziali della potenza rispetto a tensione e resistenza finite e calcolabili.

$$\overline{P_3} = \frac{\bar{V}^2}{\bar{R}} \cong 26{,}01\ \mu W$$
$$u_{P_3} = \sqrt{\left(\frac{\partial P_3}{\partial V}\right)^2 u_V{}^2 + \left(\frac{\partial P_3}{\partial R}\right)^2 u_R{}^2} \cong 0{,}58\ \ \mu W$$
$$P_3 = (26{,}01 \pm 0{,}88)\mu W$$
$$P_3 = 26{,}01\ \mu W\ \ \pm 3{,}38\%$$

Calcolate adesso le tre potenze si individua la miglior stima, ovvero quale dei tre studenti ha eseguito la misura ottenendo l'incertezza minore.

$$P_1 = (25{,}00 \pm 0{,}23)\mu W$$
$$P_2 = (20{,}25 \pm 0{,}42)\mu W$$
$$P_3 = (26{,}01 \pm 0{,}88)\mu W$$

Evidentemente il primo studente al quale corrisponde la prima potenza calcolata, ha eseguito la misura ottenendo l'incertezza minore. E' richiesta stima ed incertezza di questa potenza anche in dBm.

$$\bar{P}_{(dBm)} = 10log\frac{P_{1(mW)}}{1\ mW} \cong 16\ dBm$$

$$P_{MAX} = \overline{P_1} + u_{P_1} \cong 0{,}02523\ mW$$
$$P_{MAX_{(dBm)}} \cong -15{,}98\ dBm$$

$$P_{MIN} = \overline{P_1} - u_{P_1} \cong 0{,}02477\ mW$$
$$P_{MIN_{(dBm)}} \cong -16{,}06\ dBm$$

$$u_P = \frac{P_{MAX_{(dBm)}} - P_{MIN_{(dBm)}}}{2} \cong 0{,}04\ dBm$$

$$P_{(dBm)} = (16 \pm 0{,}04)dBm$$

Esercizio 2

Si chiede di descrivere il funzionamento di un voltmetro numerico, di indicare quali sono le fonti di incertezza interne e come minimizzarle. Per la soluzione si rimanda al testo di riferimento.

Esercizio 3

Si chiede di offrire una panoramica quanto più possibile e diversificata dei sensori di forza e di pressione, indicando anche le fonti di incertezza presenti, indicando come minimizzarle. Si rimanda al testo di riferimento per la risoluzione di questo esercizio.

Compito 23 Febbraio 2012

Esercizio 1

E' rappresentato in figura lo schermo di un oscilloscopio numerico. Noti i coefficienti di deflessione e nota l'accuratezza dello strumento, si chiede di valutare la misura dell'ampiezza del segnale rappresentato, la sua frequenza e il suo periodo. Per rilevare le grandezze cercate occorre leggere da quante divisioni è composto il segnale in ampiezza e quante divisioni è lungo il suo periodo. Si procede riportando l'accuratezza, legata al valore letto e al fondo scala, in incertezza, ipotizzando i valori distribuiti in maniera uniforme. Poi si passa alla lettura del segnale sullo schermo.

$$T = 2\ \mu s$$
$$a_T = \pm(1\%\ V_l + 1\% V_{fs}) = 0{,}12\ \mu s$$
$$u_T = \frac{a_T}{\sqrt{3}} \cong 0{,}069\ \mu s$$

$$V = 5\ mV$$
$$u_V = \frac{a_V}{\sqrt{3}} \cong 0{,}075\ mV$$

Definito il periodo si può ricavare la frequenza e la sua incertezza. Per quest'ultima l'unica incertezza da considerare è quella sul periodo stesso. Occorre quindi ipotizzare finita e calcolabile la derivata parziale della frequenza rispetto al periodo; nota l'incertezza u_T del periodo; e che $u_T \ll T$.

$$\bar{f} = \frac{1}{\bar{T}} \cong 500\ kHz$$
$$u_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)^2 u_T{}^2} \cong 17{,}32\ kHz$$
$$f = (500{,}00 \pm 17{,}32) kHz$$

Per la descrizione delle caratteristiche metrologiche dello strumento, schema a blocchi e definizione dei dispositivi di trigger, si rimanda al testo di riferimento.

<u>Esercizio 2 (esercizio numero 8 capitolo 3)</u>

Date due tensioni dipendenti tra loro, con coefficiente di correlazione noto, si richiede di stimare il risultato della loro somma e del quadrato della loro somma. Dalla relazione che lega il coefficiente di correlazione alle incertezze delle grandezze correlate, si ricava la covarianza necessaria per calcolare l'incertezza sulla stima della somma delle tensioni. Si ricordi che, per quest'ultima, è necessario ipotizzare correlate le grandezze in gioco, note u_{E1} e u_{E2}, note $u_{E1} \ll E_1$ e $u_{E2} \ll E_2$, e che le derivate parziali della somma rispetto alle singole tensioni siano finite e calcolabili.

$$\rho_{1,2} = \frac{C_{1,2}}{u_{E_1} u_{E_2}} = -1$$
$$\overline{E_S} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 \cong 3\ mV$$
$$\mathrm{u}_{E_S} = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{E}_1}\right)^2 \mathrm{u}_{\mathrm{E}_1}{}^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{E}_2}\right)^2 \mathrm{u}_{\mathrm{E}_2}{}^2 + 2\left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{E}_1}\right)\left(\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial \mathrm{E}_2}\right) \mathrm{C}_{1,2}} \cong 0{,}001\mathrm{mV}$$
$$E_S = (1{,}800 \pm 0{,}001) mV$$

Per quello che riguarda l'incertezza del quadrato di E si può procedere allo stesso modo.

$$\overline{E_P} = E_1\ E_2 = 2\ (\mathrm{mV})^2$$
$$\mathrm{u}_{E_P} = \sqrt{\left(\frac{\partial E_P}{\partial \mathrm{E}_1}\right)^2 \mathrm{u}_{\mathrm{E}_1}{}^2 + \left(\frac{\partial E_P}{\partial \mathrm{E}_2}\right)^2 \mathrm{u}_{\mathrm{E}_2}{}^2 + 2\left(\frac{\partial E_P}{\partial \mathrm{E}_1}\right)\left(\frac{\partial E_P}{\partial \mathrm{E}_2}\right) \mathrm{C}_{1,2}} = 0(\mathrm{mV})^2$$

Questo risultato non deve sorprendere perché, per quanto raro, è una singolarità che può accadere. Per risolvere l'esercizio sarà sufficiente modificare, anche di poco, le incertezze di E_1 ed E_2 per ottenere una valutazione dell'incertezza non nulla. Si lascia al lettore la possibilità di valutare tale espressione aiutandosi con il software GUM WorkBench.

Esercizio 3

Si chiede di valutare la misura indiretta di resistenza utilizzando un sensore termoresistivo RTD (Pt100), note alcune letture ripetute di temperatura e il grafico che lega temperatura a resistenza di riferimento. Si intende risolvere l'esercizio utilizzando il seguente modello semplificato del sensore:

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$$

Utilizzando il metodo probabilistico si può inizialmente trovare stima ed incertezza di categoria A della temperatura *T*. Senza altre informazioni quella di categoria A è anche l'unica incertezza dalla quale è affetta tale misura.

$$\bar{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i \cong 32{,}04\ °C$$

$$u_{T_A} = u_T = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(T_i - \bar{T})^2} \cong 0{,}05\ °C$$

Questo non basta per utilizzare il modello. Occorre ricavare dal grafico a disposizione temperatura e resistenza di riferimento (T_0 e R_0) e il coefficiente α tipico del sensore. Per fare questo si possono prendere due valori di temperatura, e relativa resistenza, ed inserirli nel modello tipico del sensore, per ricavare α.

$$T = 60\ °C \rightarrow R = 1200\ \Omega$$
$$T = 0\ °C \rightarrow R = 1000\ \Omega$$

$$1200 = 1000[1 + \alpha(60 - 0)]$$
$$\alpha \cong 0{,}0033\ °C^{-1}$$

Ipotizzando adesso la temperatura di riferimento a 0°C, con relativa R_0, e noto α, si può ricavare la resistenza corrispondente alla temperatura precedentemente stimata. Per l'incertezza occorre ipotizzare nota u_T, u_T<<T, e la derivata parziale della resistenza di uscita del sensore rispetto alla temperatura finita e colabile.

$$R = R_0[1 + \alpha(T - T_0)] \cong 1000[1 + 0{,}0033(60 - 0)] \cong 1106{,}8\ \Omega$$
$$u_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial T}\right)^2 {u_T}^2} \cong 0{,}2\ \Omega$$
$$R = (1106{,}8 \pm 0{,}2)\Omega$$

Per la descrizione del funzionamento del sensore e delle sue caratteristiche metrologiche si rimanda al testo di riferimento.

<u>Compito 25 Gennaio 2012</u>

<u>Esercizio 1</u>

Si chiede di misurare il tempo di salita al gradino mostrato sullo schermo di un oscilloscopio numerico. Sono noti, oltre all'andamento grafico del gradino, anche il coefficiente di deflessione orizzontale e l'accuratezza della sensibilità orizzontale, legata al valore letto e a quello di fondo scala. Inoltre viene chiesto di indicare le caratteristiche che lo strumento dovrà avere per compiere questa misura (ampiezza di banda) e che tipo di campionamento occorre adottare.
Il tempo di salita è individuato sullo schermo tra le lettere A e B, punti in cui il segnale è rispettivamente al 10 e al 90% del suo valore di regime. Conoscendo quanto vale ogni divisione orizzontale si può trovare la distanza che intercorre tra i punti A e B e quindi il valore di tale tempo.

$$\overline{T_s} = T_2 - T_1 = B - A = 600ns$$

L'incertezza su tale misura è legata all'accuratezza indicata, ipotizzata uniforme la distribuzione dei valori. L'accuratezza è costituita da una componente legata al valore letto e al fondo scala.

$$a = \pm(3\%\,Vl + 1\%\,Vfs) = \left(\frac{3}{100}\,600 + \frac{1}{100}1000\right) = 28ns$$
$$u_{T_s} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cong 16{,}17ns$$
$$T_s = (600{,}00 \pm 16{,}17)ns$$

Ipotizzando ideale il gradino si può utilizzare la relazione che lega tempo di salita alla banda, per trovare appunto la sua ampiezza.

$$T_s = \frac{0{,}34}{B_3}$$
$$\overline{B_3} = \frac{0{,}34}{\overline{T_s}} \cong 570kHz$$

Per trovare l'incertezza sull'ampiezza di banda occorre ipotizzare nota u_{Ts}, $u_{Ts} << T_S$ e la derivata parziale della banda rispetto al tempo finita e calcolabile.

$$u_{B_3} = \sqrt{\left(\frac{\partial B_3}{\partial T_s}\right)^2 \mathrm{u}_{T_s}{}^2} \cong 0{,}016MHz$$

$$B_3 = (579 \pm 16)kHz$$

Per poter compiere questa misura l'oscilloscopio dovrà avere una banda maggiore di 570 KHz e utilizzare il metodo di campionamento reale.

Esercizio 2

Una linea di trasmissione è composta da tre blocchi che rispettivamente amplificano, attenuano e amplificano di nuovo il segnale in ingresso. Si chiede di trovare il guadagno o l'eventuale attenuazione complessiva. La prima amplificazione (A) è espressa come guadagno in potenza, l'attenuazione al secondo blocco (B) è in decibel, mentre la seconda amplificazione (C), al terzo blocco, è indicata come un guadagno in tensione.
Si procede portando i guadagni in potenza e tensione negli equivalenti in decibel, per poi fare una semplice somma algebrica (G). Tale risultato, evidentemente in decibel, può essere riportato anche come un guadagno in potenza.

$$A_{dB} = 10\log(A) = 10log20 \cong 13dB$$
$$B_{dB} = -50dB$$
$$C_{dB} = 20\log(C) = 20dB$$

$$G_{dB} = A_{dB} + B_{dB} + C_{dB} \cong -17dB$$
$$G_W = 10^{\frac{G_{dB}}{10}} = \frac{1}{50} \cong 0{,}02$$

Esercizio 3

Nella prima parte si chiede di valutare la resistenza in uscita R_{NTC} di un termistore NTC date le sue principali caratteristiche. Nella seconda parte il sensore appena descritto viene inserito in un ponte di Wheatstone. Note la tensione di alimentazione, il valore dei resistori e la loro posizione nel ponte, si chiede di valutare la misura della resistenza incognita.

$$R_{NTC} = R_0 e^{\beta\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)}$$

Noto il modello è possibile calcolare la stima della resistenza cercata. Per la sua incertezza occorre ipotizzare indipendenti R_0 e β; note u_{R0} e u_β; u_{R0}<<R_0 e u_β<< β; finite e calcolabili le derivate parziali di R_{NTC} rispetto a R_0 e β.

$$u_{R_{NTC}} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_{NTC}}{\partial R_0}\right)^2 \mathrm{u}_{R_0}{}^2 + \left(\frac{\partial R_{NTC}}{\partial \beta}\right)^2 \mathrm{u}_{\beta}{}^2} \cong 0{,}013 k\Omega$$

$$R_{NTC} = (12{,}555 \pm 0{,}013) k\Omega$$

Si noti che la tensione di alimentazione del ponte e i valori di R_1 ed R_3 non sono necessari alla soluzione del problema.

Compito 15 Dicembre 2011

Esercizio 1

Si chiede di valutare la misura indiretta di un volume noti altezza e raggio di base, misurate con lo stesso strumento e quindi correlate tra loro. Di ogni grandezza si conoscono alcune letture ripetute e l'accuratezza dello strumento con il quale sono state rilevate. Si procede utilizzando il metodo probabilistico per determinare stima e incertezza di categoria A di altezza e raggio. Ipotizzando poi i valori distribuiti in maniera uniforme dall'accuratezza si risale all'incertezza di categoria B, che andrà sommata in quadratura per ottenere l'incertezza composta su entrambe le misure.

$$\bar{r} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} r_i \cong 1{,}582 cm$$

$$u_{r_A} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(r_i - \bar{r})^2} \cong 0{,}012806 cm$$

$$u_{r_B} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{01\%(\bar{r})}{\sqrt{3}} \cong 0{,}000913cm$$
$$u_r = \sqrt{{u_{r_A}}^2 + {u_{r_B}}^2} \cong 0{,}012839cm$$
$$\mathrm{r} = (1{,}582 \pm 0{,}013)\ cm$$
$$\mathrm{h} = (7{,}990 \pm 0{,}012)\ cm$$

La fase successiva consiste nello stimare il volume *V* utilizzando la relazione che lo lega ad altezza h e raggio r del cilindro in questione. Per l'incertezza su tale stima occorre prima calcolare la covarianza, poi ipotizzare le grandezze correlate, u_h e u_r note, u_h<<h e u_r<<r, le derivate parziali del volume rispetto ad altezza e raggio finite e calcolabili.

$$\bar{V} = \pi\, r^2 h \cong 62{,}822cm^3$$
$$C_{r,h} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (r_i - \bar{r})(h_i - \bar{h}) \cong 0{,}000095cm^2$$

$$u_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 \mathrm{u}_r{}^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 \mathrm{u}_h{}^2 + 2\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right) C_{r,h}} \cong 1{,}092cm^2$$
$$V = (62{,}822 \pm 1{,}092)cm^3$$
$$V = 62{,}822cm^3 \pm 1{,}74\%$$

La covarianza è legata al coefficiente di correlazione tramite la seguente relazione. Tale coefficiente è adimensionale e assume valore nullo per grandezze indipendenti, mentre assume valori pari a +1 o -1 in caso di grandezze dipendenti.

$$\rho_{r,h} = \frac{C_{r,h}}{u_r\, \mathrm{u}_h}$$

Esercizio 2

Una linea di trasmissione attenua di un certo fattore in potenza c=4. Considerando che entrano nella linea alcune potenze espresse in dBm, si chiede di calcolare l'uscita, sia in watt che in dBm. Si procede riportando dBm il fattore di attenuazione e lo si sottrae ad ogni potenza data. Le tre nuove potenze attenuate si riportano poi in watt.

$$c_{(dBm)} = 10log\frac{4}{10} \cong -4dBm$$

$$P_{1\,OUT_{(dBm)}} = P_{1_{(dBm)}} + c \cong +6 - 4 \cong 2dBm$$
$$P_{1\,OUT_{(mW)}} = 10^{\frac{P_{1\,OUT_{(dBm)}}}{10}} \cong 1{,}59mW$$

$$P_{2\,OUT_{(dBm)}} \cong -10dBm$$
$$P_{2\,OUT_{(mW)}} \cong 0{,}1mW$$
$$P_{3\,OUT_{(dBm)}} \cong -24dBm$$
$$P_{3\,OUT_{(mW)}} \cong 0{,}004mW$$

Esercizio 3

Si chiede di stimare la misura del campo di induzione magnetica di un sensore ad effetto Hall note le sue caratteristiche quali spessore, costante di funzionamento k, tensione e corrente di controllo. Dal modello del sensore si ricava l'incognita richiesta e si può passare immediatamente alla stima di essa, poiché sono tutti già noti i dati necessari. Per l'incertezza è necessario prima ipotizzare indipendenti le grandezze in gioco, note le incertezze u_E e u_I, $u_E \ll E$ e $u_I \ll I$, finite e calcolabili le derivate parziali del campo B rispetto a tensione e corrente.

$$E = \frac{k\ B\ I}{s}$$
$$\bar{B} = \frac{\bar{E}\ s}{k\ \bar{I}} = 1T$$
$$u_B = \sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial E}\right)^2 \mathrm{u}_E{}^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial \mathrm{I}}\right)^2 \mathrm{u}_I{}^2} \cong 0{,}014T$$
$$B = (1{,}000 \pm 0{,}014)T$$

Compito 14 Settembre 2011

Esercizio 1

Si chiede di valutare la misura indiretta del parallelo di due resistori. Sono noti i valori di resistenza rilevati con un multimetro diverso per ogni resistore, aventi entrambi la stessa accuratezza data. Tale accuratezza è legata al valore letto e al count. Si risale alla componente del count osservando con quante cifre sono indicate le letture, mentre si ricava il valore letto utilizzando il metodo probabilistico, che stimerà il valore dei resistori. L'incertezza su tale stima si ricava dall'accuratezza, ipotizzando la distribuzione dei valori uniforme. Si procede alla stessa maniera per entrambi i resistori.

$$\overline{R_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_{1_i} \cong 1{,}582k\Omega$$

$$u_{R_{1_A}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(R_{A_i} - \overline{R_1}\right)^2} \cong 0{,}013k\Omega$$

$$a = (0{,}7\%\,\overline{R_1} + 2count) = \left(\frac{\overline{R_1}}{100}0{,}07 + 2(0{,}01)\right) = 0{,}031k\Omega$$

$$u_{R_{1_B}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cong 0{,}018k\Omega$$

$$u_{R_1} = \sqrt{{u_{R_{1_A}}}^2 + {u_{R_{1_B}}}^2} \cong 0{,}022k\Omega$$

$$R_1 = (1{,}582 \pm 0{,}022)k\Omega$$

$$R_2 = (7{,}990 \pm 0{,}045)k\Omega$$

Noti i valori dei resistori si può passare adesso al parallelo. Ricordando il modello che rappresenta appunto il parallelo di due resistori si può ricavarne stima ed incertezza. Per procedere al calcolo occorre prima porre le seguenti condizioni: R_1 ed R_2 indipendenti; u_{R1} e u_{R2} note; $u_{R1} \ll R_1$ e $u_{R2} \ll R_2$; derivate parziali del parallelo rispetto alle singole resistenze, finite e calcolabili.

$$R_P = \frac{R_1\,R_2}{R_1 + R_2} \cong 1{,}321k\Omega$$

$$u_{R_P} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_P}{\partial R_1}\right)^2 \mathrm{u}_{R_1}{}^2 + \left(\frac{\partial R_P}{\partial R_2}\right)^2 \mathrm{u}_{R_2}{}^2} \cong 0{,}015k\Omega$$

$$R_P = (1{,}321 \pm 0{,}015)k\Omega$$

Si chiede infine di valutare lo stesso parallelo anche nel caso in cui le due grandezze in gioco fossero correlate anziché indipendenti. Restano invariate le restanti ipotesi ma occorre calcolare anche la covarianza.

$$C_{1,2} = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(R_{1,i} - \overline{R_1}\right)\left(R_{2,i} - \overline{R_2}\right) \cong 0{,}000095(k\Omega)^2$$

$$u_{R_P} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_P}{\partial R_1}\right)^2 \mathrm{u}_{R_1}{}^2 + \left(\frac{\partial R_P}{\partial R_2}\right)^2 \mathrm{u}_{R_2}{}^2 + 2\left(\frac{\partial R_P}{\partial R_1}\right)\left(\frac{\partial R_P}{\partial R_2}\right)C_{1,2}} \cong 0{,}016k\Omega$$

$$R_P = (1{,}321 \pm 0{,}016)k\Omega$$

Esercizio 2

Si chiede di valutare una misura indiretta di una corrente che attraversa un resistore. Sono note alcune letture ripetute di potenza dissipata sul resistore ed un'unica lettura di resistenza, realizzata con un multimetro digitale. Non essendo note altre informazioni riguardo la potenza, si considera come unica fonte d'incertezza quella di categoria A calcolata tramite metodo probabilistico. Per la resistenza invece è nota l'accuratezza del multimetro, legata all'unico valore letto disponibile e al count. Ipotizzando una distribuzione uniforme dei valori si ricava l'incertezza.

$$\bar{P} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i \cong 1016{,}30mW$$

$$u_{P_A} = u_P = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(P_i - \bar{P})^2} \cong 0{,}29mW$$

$$P = (1016{,}30 \pm 0{,}29)mW$$

$$a = (0{,}2\%\,\bar{R} + 1count) = \left(\frac{\bar{R}}{100}0{,}2 + 1(1)\right) = 3{,}99\Omega$$

$$u_R = \frac{a}{\sqrt{3}} \cong 2{,}3\Omega$$
$$R = (1495 \pm 2{,}3)\Omega$$

Per procedere al calcolo dell'incertezza sulla stima della corrente della misura indiretta occorre fare le seguenti ipotesi: P ed R scorrelate; u_P e u_R note; u_P<<P e u_R<<R; derivate parziali di corrente rispetto a potenza e resistenza finite e calcolabili.

$$\bar{I} = \sqrt{\frac{\bar{P}}{\bar{R}}} = 26{,}073mA$$
$$u_I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial P}\right)^2 \mathrm{u}_P{}^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial R}\right)^2 \mathrm{u}_R{}^2} \cong 0{,}042mA$$
$$I = (26{,}073 \pm 0{,}042)mA$$

Esercizio 3

Si misuri il valore efficace della tensione in uscita al giunto freddo di una termocoppia ideale (b=0).
Dati i 5 valori rilevati riguardo la differenza di temperatura tra i giunti, la relazione che li lega alla stima è la media aritmetica.

$$\overline{\Delta T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta T_i \cong 101°C$$

L'incertezza assoluta su tale stima si calcola come radice della miglior stima della varianza. E' un incertezza di categoria A poiché dedotta, in mancanza di altre informazioni, necessariamente attraverso valutazioni di tipo statistico.

$$u_{\Delta T} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(\Delta T_i - \overline{\Delta T})^2} \cong 1{,}14°C$$

Il coefficiente di sensibilità α è noto ed affetto da incertezza, e corrisponde al coefficiente Seebeck tipico di questa coppia bimetallica. Entrambi i fattori che compaiono del modello di questa termocoppia sono affetti da incertezza quindi, per quello che riguarda la stima della tensione ai capi dei giunti, vale la seguente equazione approssimata (termocoppia ideale).

$$\overline{\Delta V} = \alpha(\Delta T) + \beta(\Delta T)^2 + o[(\Delta T)^2] \cong \alpha(\overline{\Delta T}) \cong 4545\mu V$$

Mentre per quello che riguarda l'incertezza occorre fare le dovute ipotesi prima di passare al calcolo tramite derivate parziali. ΔT e α grandezze indipendenti; u_α e $u_{\Delta T}$ note; derivate parziali di ΔV rispetto a ΔT e α, sempre finite e calcolabili.

$$u_{\Delta V} = \sqrt{\left(\frac{\partial \Delta V}{\partial \alpha}\right)^2 \; {u_\alpha}^2 + \left(\frac{\partial \Delta V}{\partial \Delta T}\right)^2 {u_{\Delta T}}^2} \cong 508\mu V$$

$$\Delta V = (4545 \pm 508)\;\mu V$$

<u>Compito 13 Luglio 2011</u>

<u>Esercizio 1</u>

Dall'equazione tipica del pendolo semplice si chiede di ricavare stima e incertezza del valore dell'accelerazione di gravità dati periodo di oscillazione e lunghezza del pendolo. Solo il valore di lunghezza è affetto da incertezza quindi è sufficiente ipotizzare tale incertezza u_L nota, u_L<<L e che la derivata parziale dell'accelerazione rispetto alla lunghezza sia finita e calcolabile.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{G}}$$

$$\bar{G} = \frac{4\pi^2\bar{L}}{\overline{T^2}} \cong 9{,}808\,\frac{m}{s^2}$$

$$u_G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial L}\right)^2 {u_L}^2} \cong 0{,}088\,\frac{m}{s^2}$$

$$G = (9{,}808 \pm 0{,}088)\,\frac{m}{s^2}$$

$$G = 9{,}81\frac{m}{s^2} \pm 0{,}09\%$$

Esercizio 2

Si chiede di valutare il valore di un resistore campione misurato con un multimetro numerico con sette cifre e mezzo, note alcune letture ripetute e l'accuratezza dello strumento. Si procede utilizzando il metodo probabilistico per individuare stima e incertezza di categoria A della resistenza.

$$\bar{R} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i \cong 1{,}0000105\Omega$$

$$u_{R_A} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(R_i - \bar{R})^2} \cong 7{,}07\ 10^{-5}\ \mathrm{m}\Omega$$

L'accuratezza data è composta da un valore fisso e da uno legato al count, che può essere dedotto da come sono indicate le letture. Dall'accuratezza si ricava l'incertezza di categoria B, ipotizzando una distribuzione dei valori uniforme.

$$a = \pm[0{,}0001 + 10(0{,}0000001)] = 0{,}101\ m\Omega$$

$$u_{R_B} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cong 0{,}058\ m\Omega$$

Sono presenti inoltre altre due fonti di incertezza. La prima si riferisce al termometro che monitora il bagno d'olio in cui è immerso il resistore. La seconda è una resistenza legata da una percentuale al valore nominale R_N del campione. Si prenda quest'ultima in esame. Essendo proporzionale al valore nominale del resistore risulta essere dimensionalmente uguale alle incertezze di categoria A e B già trovate e può essere sommata in quadratura con queste per determinare l'incertezza composta della stima.

$$u_{R_C} = 0{,}002\%\ R_N = 0{,}02 m\Omega$$

$$u_R = \sqrt{{u_{R_A}}^2 + {u_{R_B}}^2 + {u_{R_C}}^2} \cong 0{,}061\ m\Omega$$

Questa non è ancora l'incertezza definitiva. Occorre considerate anche l'ultima fonte, non legata direttamente alla resistenza ma valutata come percentuale della temperatura dell'olio. Questo significa che per poter essere inserita nella valutazione finale ne dovrà essere utilizzato il valore relativo.

$$u_T = 0{,}001\%\, T = 0{,}00023°C$$
$$u'_T = 0{,}00001$$
$$u'_R = 0{,}000062$$
$$u'_{R_{tot}} = \sqrt{{u'_T}^2 + {u'_R}^2} = 0{,}000062$$
$$u_{R_{tot}} = 0{,}062\ m\Omega$$

$$R = (1{,}0000105 \pm 0{,}000062)\Omega$$
$$R = 1{,}0000105\Omega \pm 0{,}0062\%$$

Esercizio 3

Si valuti la tensione V_1, con stima ed incertezza, relativa al potenziometro rappresentato. Per quello che riguarda la descrizione del suo funzionamento si rimanda al testo di riferimento. Sono noti la tensione di alimentazione V relativa allo spostamento massimo L_1+L_2 (valore di fondo scala) e lo spostamento L_1 relativo al valore incognito di tensione V_1. Il potenziometro é un dispositivo con cursore mobile e in questa configurazione fissa funziona come un partitore di tensione. Il resistore che lo compone può essere visto come la somma di due resistori in serie sui quali vengono prelevate due tensioni, che cambiano in base alla posizione del cursore di prelievo. Essendo resistività e sezione del conduttore la medesima per tutta la sua lunghezza,il partitore può essere riportato in funzione della lunghezza, o meglio della posizione, alla quale viene effettuato il prelievo di tensione.

$$V_1 = V\frac{R_1}{R_1 + R_2} = V\frac{L_1}{L_1 + L_2}$$
$$R_1 = \frac{\rho L_1}{s};\ R_2 = \frac{\rho L_2}{s}$$

Per il calcolo dell'incertezza devono sempre essere descritte le condizioni che la rendono calcolabile, ovvero u_V nota, u_V<<V, la derivata parziale di

V_1 rispetto a V finita e calcolabile.

$$u_{V_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial V_1}{\partial V}\right)^2 u_V{}^2} \cong 0{,}00024V$$
$$V_1 = (354{,}96 \pm 0{,}24)mV$$

Si faccia riferimento al libro di testo per la descrizione delle componenti “soggettive” di incertezza.

Esercizio 4

Si chiede di indicare tensione efficace e continua applicata ad un resistore di valore indicato nota anche la potenza su esso dissipata.

$$V_{eff} = \sqrt{PR} = \sqrt{200\ 50} = 100V$$

In questo esercizio si chiede anche di definire alcuni termini e di spiegarne la loro utilità. Per questa parte si rimanda al testo di riferimento.

Compito 16 Giugno 2011

Esercizio 1

Si vuole valutare la distanza tra due oggetti all’interno di un fluido tramite sistema ad ultrasuoni con misura del tempo di volo. Si hanno a disposizione una serie di misure di tale tempo, la velocità del suono nel fluido (con incertezza) e inoltre si chiede di valutare il risultato finale considerando anche un invecchiamento del sensore. Dalle misure di tempo di volo si trovano stima ed incertezza attraverso metodo probabilistico. La distanza richiesta viene dedotta del modello del sensore. Sono in gioco l’incertezza sul tempo e quella sulla velocità, occorre ricordare le ipotesi necessarie al calcolo dell’incertezza sulla distanza quali l’indipendenza di tempo e velocità, u_V e u_t note, u_V<<V e u_t<<t, derivata parziale della distanza rispetto a velocità e tempo finite e calcolabili.

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i \cong 200ms$$
$$u_t = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2} \cong 1{,}84ms$$
$$u'_t = \frac{u_t}{\bar{t}} \cong 0{,}0092$$
$$t = \frac{v}{d}$$
$$\bar{d} = \bar{v}\,\bar{t} = 110m$$
$$u_d = \sqrt{\left(\frac{\partial d}{\partial v}\right)^2 {u_v}^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial t}\right)^2 {u_t}^2} \cong 1{,}034m$$

Si tratta di una misura indiretta quindi per inserire nella valutazione finale della distanza il fatto che il sensore è affetto da invecchiamento basta mettere in quadratura le incertezze relative in gioco.

$$u'_d = \frac{u_d}{\bar{d}} \cong 0{,}0094$$
$$u'_{d2} = \sqrt{{u'_t}^2 + {u'_d}^2 + {u'_{inv}}^2} \cong 0{,}00026$$
$$u_{d2} = u'_{d2}\,\bar{d} \cong 0{,}03m$$
$$d = (110{,}00 \pm 0{,}03)m$$

Per la descrizione del funzionamento del sensore e delle sue caratteristiche metrologiche si rimanda al testo di riferimento.

Esercizio 2

Si chiede di determinare l'incertezza del rapporto di attenuazione k ottenuto da un partitore di tensione, realizzato dalla serie di due resistori noti, prelevando la tensione sul secondo resistore. Sono noti stima ed incertezza dei due resistori R_1 ed R_2. Si procede ricavando il modello matematico che realizza tale partitore e da esso il rapporto di attenuazione k. Nella serie di due resistori scorre la stessa corrente I e la somma delle tensioni V_1 e V_2 sui resistori è uguale alla tensione su tutta la serie V_S.

$$V_S = V_1 + V_2$$
$$V_1 = R_1 I;\ V_2 = R_2 I$$
$$V_S = R_1 I + R_2 I = I(R_1 + R_2)$$
$$I = \frac{V_S}{R_1 + R_2}$$
$$V_2 = R_2 I = R_2 \frac{V_S}{R_1 + R_2}$$
$$k = \frac{V_2}{V_S} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Con la relazione che lega i due resistori a k si va a valutarne stima ed incertezza. Per l'incertezza in particolare occorre ipotizzare indipendenti i due valori di resistenza, note le loro incertezza u_{R1} ed u_{R2}, $u_{R1} \ll R_1$, $u_{R2} \ll R_2$, e le derivate parziali di k rispetto ad R_1 ed R_2 finite e calcolabili.

$$\bar{k} = \frac{\overline{R_2}}{\overline{R_1} + \overline{R_2}} = 0{,}01$$
$$u_k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial R_1}\right)^2 {u_{R_1}}^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial R_2}\right)^2 {u_{R_2}}^2} \cong 0{,}00014$$
$$k = (0{,}01000 \pm 0{,}00014)$$

Si chiede inoltre di valutare il solito rapporto di attenuazione anche nel caso in cui si scambino i resistori.

$$k_2 = (0{,}99000 \pm 0{,}00014)$$

Per la descrizione dell'utilizzo degli attenuatori nel blocco di condizionamento in un oscilloscopio numerico, si rimanda al testo di riferimento.

<u>Esercizio 3</u>

Si chiede di valutare stima ed incertezza di una misura serie di misure dirette di diametro. La misura è affetta da un contributo di incertezza dovuto allo strumento ed ad un contributo dovuto alla temperatura. Si procede trovando la stima della misura e la sua incertezza di categoria A. Il contributo di categoria B dovuto allo strumento è già noto e dichiarato. Per trovare l'incertezza composta occorre mettere in quadratura non solo i contributi di categoria A e B ma anche quello relativo alla temperatura.

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \cong 10{,}0014mm$$

$$u_{d_A} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2} \cong 0{,}00022mm$$

$$u_d = \sqrt{{u_{d_A}}^2 + {u_{d_B}}^2 + {u_T}^2} \cong 0{,}0041mm$$

$$d = (10{,}0014 \pm 0{,}0041)mm$$

Esercizio 4

Questo esercizio consiste nella descrizione di una misura con multimetro digitale, definizione delle caratteristiche metrologiche dello strumento e spiegazione delle attività svolte delle organizzazioni metrologiche. Si rimanda per questo al testo di riferimento.

Compito 23 Febbraio 2011

Esercizio 1

Si chiede di valutare la stima dell'indice di rifrazione di un cristallo, nota la sua caratteristica e il valore che assume l'angolo critico. In una seconda fase si chiede di ripetere i calcoli con un altro valore dell'angolo. Per la valutazione dell'incertezza s'ipotizzi nota l'incertezza $u_\theta$sull'angolo, $u_\theta <<$ θ e la derivata parziale dell'indice di rifrazione rispetto all'angolo finita e calcolabile

$$\overline{n_1} = \frac{1}{sen\overline{\theta_1}} \cong 1{,}55$$

$$u_{n_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial n_1}{\partial \theta_1}\right)^2 {u_{\theta_1}}^2} \cong 0{,}37$$

$n_1 = (1{,}55 \pm 0{,}37)$
$n_1 = 1{,}55 \pm 23{,}87\%$
$n_2 = (1{,}28 \pm 0{,}01)$
$n_2 = 1{,}28 \pm 0{,}78\%$

Le due misure non sono compatibili poiché non hanno valori in comune, infatti $n_{2\,MAX} < n_{1\,MIN}$.

<u>Esercizio 2</u>

Si chiede di valutare indirettamente il volume di un prisma date alcune letture ripetute della misura dei suoi lati e l'incertezza dello strumento con il quale sono stati misurati. Si procede valutando stima ed incertezza di categoria A, tramite metodo probabilistico, di ogni lato del prisma. In assenza di altre indicazioni quella di categoria A è l'unica fonte d'incertezza presente. Valutate le misure dei tre fattori che compongono il modello del volume si passa al calcolo della sua stima e relativa incertezza. Per fare questo occorre ipotizzare indipendenti le misure dei tre lati; note ognuna delle loro incertezze u_a, u_b, u_c; u_a<<a, u_b<<b, u_c<<c; le derivate parziali del volume rispetto ad ogni lato finite e calcolabili.

$$\bar{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \cong 5{,}223mm$$

$$u_{a_A} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(a_i - \bar{a})^2} \cong 0{,}029mm$$

$$u_a = \sqrt{{u_{a_A}}^2 + {u_{a_B}}^2} \cong 0{,}036mm$$

$a = (5{,}223 \pm 0{,}036)mm$
$b = (9{,}553 \pm 0{,}052)mm$
$c = (3{,}762 \pm 0{,}042)mm$

$\bar{V} = \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} \cong 187{,}70mm^3$

$$u_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^2 {u_a}^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)^2 {u_b}^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)^2 {u_c}^2} \cong 2{,}58mm^3$$
$$V = (187{,}70 \pm 2{,}58)mm^3$$

Esercizio 3

Si chiede di calcolare la potenza dissipata su un resistore di valore noto, utilizzando due diversi modelli con corrente e tensione noti. Sono a disposizione due valori di corrente e due di tensione, è necessario quindi trovare quattro potenze ed esprimerle sia in watt che in dBm.

$$P_1 = RI^2 = 20\,mW$$
$$P_{1_{(dBm)}} = 10log\frac{P_{1_{(mW)}}}{1_{(mW)}} \cong 13{,}01dBm$$

$$P_2 = RI^2 = 0{,}125\,pW = 0{,}125\;10^{-9}\,mW$$
$$P_{2_{(dBm)}} \cong -99{,}03\,dBm$$

$$P_3 = \frac{V^2}{R} = 0{,}002\,mW$$
$$P_{3_{(dBm)}} \cong -26{,}99\,dBm$$

$$P_4 = \frac{V^2}{R} = 3{,}2\,mW$$
$$P_{3_{(dBm)}} \cong 5{,}05\,dBm$$

Esercizio 4

In questo esercizio si chiede la descrizione di una misura ottenuta con una bilancia a due piatti. Si rimanda al testo di riferimento per tale descrizione.

Compito 26 Gennaio 2011

Esercizio 1

Si chiede di valutare stima e incertezza di una grandezza *v* noto il modello che la caratterizza. Si procede indicando il modello per poi passare al calcolo. Per l'incertezza è necessario ipotizzare indipendenti le grandezze che compaiono nel modello a, w e b; note le loro incertezza u_a, u_w e u_b; $u_a \ll a$, $u_w \ll w$ e $u_b \ll b$; finite e calcolabili le derivate parziali di *v* rispetto ad a, w e b.

$$\bar{v} = \bar{a} + \bar{b}\,\bar{w} = 2{,}56\,mm$$
$$u_v = \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)^2 {u_a}^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial w}\right)^2 {u_w}^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial b}\right)^2 {u_b}^2} \cong 0{,}101mm$$
$$v = (2{,}560 \pm 0{,}101)mm$$
$$v = 2{,}56\,mm \pm 3{,}94\%$$

Si chiede inoltre di determinare quale delle tre incertezze è l'unica non trascurabile nella valutazione di *v*.

Se:
$$u_a \cong 0 \to u_v \cong 0{,}013$$
$$u_b \cong 0 \to u_v \cong 0{,}10$$
$$u_c \cong 0 \to u_v \cong 0{,}10$$

Per questo l'unica variabile che sostanzialmente influisce sull'incertezza di *v* è a.

Esercizio 2

Si chiede di valutare la misura indiretta di una resistenza data dal parallelo di due resistori. Del primo resistore si conoscono una serie di letture di resistenza eseguite con multimetro numerico di accuratezza nota. Del secondo si ha a disposizione soltanto il certificato di taratura. Su tale certificato vi è indicato il valore del resistore, la sua incertezza, più un'incertezza aggiuntiva legata al tempo che è trascorso dall'ultima taratura. Andando per ordine si procede nel calcolare, tramite metodo probabilistico, il valore del primo resistore e la sua incertezza di categoria A. Per la categoria B occorre portare l'accuratezza nota in incertezza ipotizzando i valori distribuiti in maniera uniforme. L'incertezza composta si trova mettendo in quadratura quella di categoria A e quella di categoria B.

$$\overline{R_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_{1_i} = 1{,}0823\ k\Omega$$

$$u_{R_{1_A}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(R_{1_i} - \overline{R_1}\right)^2} \cong 0{,}00489\ k\Omega$$

$$u_{R_{1_B}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \cong 0{,}0063\ k\Omega$$

$$u_{R_1} = \sqrt{{u_{R_{1_A}}}^2 + {u_{R_{1_B}}}^2} \cong 0{,}00797\ k\Omega$$

$$R_1 = (1{,}0823\ \pm 0{,}0080)k\Omega$$

Per il secondo resistore occorre prestare attenzione soprattutto all'incertezza aggiuntiva. Il certificato è stato emesso a Dicembre 2009 mentre la misura in questione è stata eseguita a Gennaio 2011, dopo 13 mesi. L'incertezza aggiuntiva consta di un 1% in più per ogni mese che supera un anno dalla data di taratura. Questo significa che fino a Dicembre 2010 la misura non è affetta da questo tipo di incertezza ma lo diviene dopo, per un totale quindi di 1 mese (da Dicembre 2010 a Gennaio 2011). Quindi occorre considerare l'1% in più per 1 mese. Per chiarezza si indicherà con $u_{R_{2_{tar}}}$ l'incertezza relativa alla taratura e con $u_{R_{2_{inv}}}$ quella inerente all' "invecchiamento" del certificato.

$$u'_{R_2} = \sqrt{{u'_{R_{2_{tar}}}}^2 + {u'_{R_{2_{inv}}}}^2} \cong 0{,}0141$$

$$u_{R_2} = u'_{R_2}\,\overline{R_2} = 14{,}14\ \Omega$$

Noti stima e incertezza per entrambi i resistori si può passare al calcolo del loro parallelo. La stima si trova utilizzando il tipico modello del parallelo. Per l'incertezza occorre ipotizzare indipendenti i due valori di resistenza; note le loro incertezze u_{R1} e u_{R2}; $u_{R1} \ll R_1$ e $u_{R2} \ll R_2$; finite e calcolabili le derivate parziali del parallelo R_P rispetto a R_1 e R_2.

$$R_1 = (1{,}0823\ \pm 0{,}0080)k\Omega$$

$R_2 = (1000 \pm 14{,}14)\Omega$

$$\overline{R_P} = \frac{\overline{R_1}\,\overline{R_2}}{\overline{R_1} + \overline{R_2}} \cong 0{,}5198\ k\Omega$$

$$u_{R_P} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_P}{\partial R_1}\right)^2 {u_{R_1}}^2 + \left(\frac{\partial R_P}{\partial R_2}\right)^2 {u_{R_2}}^2} \cong 4{,}2\ \Omega$$

$R_P = (519{,}8 \pm 4{,}2)\Omega$
$R_P = 0{,}52\ k\Omega \pm 8\%)$

Esercizio 3

Di un determinato componente viene fornita una tabella che indica il tempo di rottura in giorni legato alle varie temperature di utilizzo. Si chiede di determinare covarianza e coefficiente di correlazione. Successivamente anche di tracciare un grafico che rappresenti il legame tra le grandezze tabellate. Si procede calcolando stima ed incertezza di categoria A, tramite metodo probabilistico, sia della temperatura C che del tempo T. In assenza di altre informazioni quella di categoria A è l'unica incertezza presente.

$$\bar{C} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C_i = 300\ °C$$

$$u_{C_A} = u_C = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(C_i - \bar{C})^2} \cong 22{,}82\ °C$$

$$\bar{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i = 582{,}89\ [giorni]$$

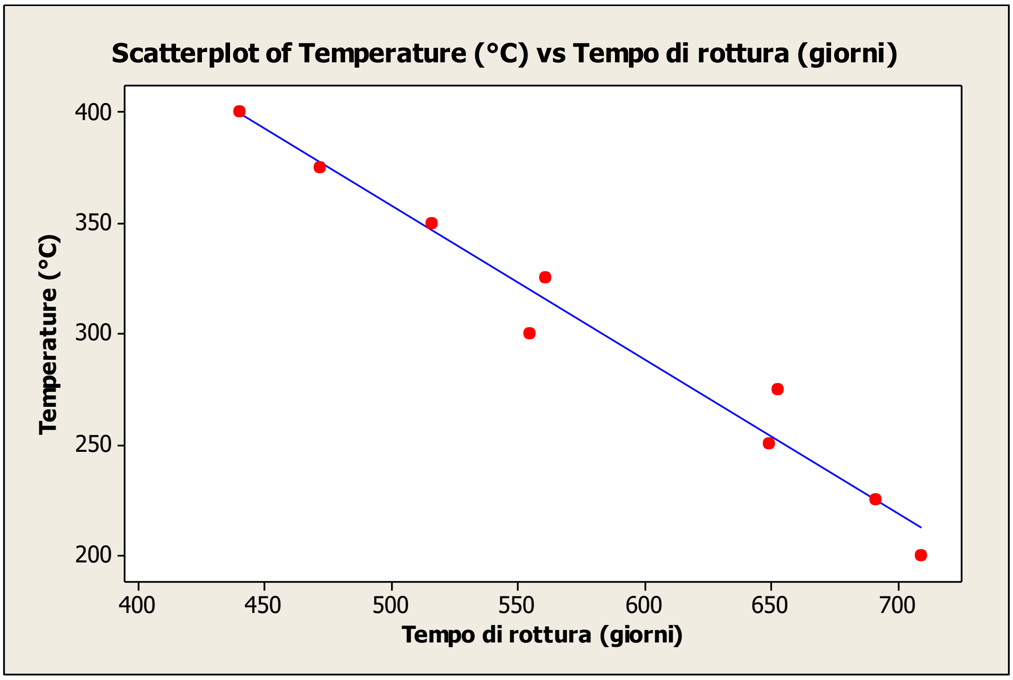
$$u_{T_A} = u_T = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(T_i - \bar{T})^2} \cong 32{,}34\ [giorni]$$

Adesso utilizzando le opportune relazioni si trovano covarianza e coefficiente di correlazione.

$$C_{C,T} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (C_i - \bar{C})(T_i - \bar{T}) \cong -726{,}04$$

$$\rho_{C,T} = \frac{C_{C,T}}{u_C \, u_T} \cong -0{,}984 \cong -1$$

Di seguito il grafico che lega le temperature (°C) al tempo di rottura (giorni).



Esercizio 4

Si chiede di definire il SI, le ragioni della sua esistenza e alcune nozioni riguardo ai campioni primari. Per questo esercizio si rimanda al testo di riferimento.

Compito 15 Dicembre 2010

Esercizio 1

Si chiede di valutare la misura di resistenza allo strappo di un cavo composto da un certo numero di fili paralleli, utilizzando due metodi. Sono noti stima ed incertezza della resistenza di ogni filo che compone il cavo.

Primo metodo di risoluzione.
Si chiede di valutare la resistenza totale come somma delle singole resistenze. Espresso il modello si ricava la stima; per l'incertezza occorre ipotizzare indipendenti tra loro le resistenze dei fili, note tutte le incertezza dei singoli cavi u_{ri}, che ogni incertezza sia molto minore della rispettiva stima $u_{ri} << r_i$, e che le derivate parziali della somma rispetto alle singole resistenze siano finite e calcolabili.

$$\overline{r_T} = \sum_{i=1}^{12} r_i = 71600\ N$$

$$u_{r_T} = \sqrt{\sum_{i=1}^{12} \left(\frac{\partial r_T}{\partial r_i}\right)^2 {u_{r_i}}^2} \cong 107{,}70N$$

$$r_T = (71600{,}00 \pm 107{,}70)N$$

$$r_T' = 71600N \pm 0{,}15\%$$

Secondo metodo di risoluzione.
Si chiede di valutare la resistenza totale come prodotto del filo più debole r_d per il numero di fili totali di cui è composto il cavo. Come nel caso precedente, espresso il modello, si ricava la stima; per l'incertezza occorre ipotizzare indipendenti tra loro le resistenze dei fili, note tutte le incertezza dei singoli cavi u_{ri}, che ogni incertezza sia molto minore della rispettiva stima $u_{ri} << r_i$, e che le derivate parziali della somma rispetto alle singole resistenze siano finite e calcolabili.

$$\overline{r_T} = 12\ \overline{r_d} \cong 12(5700) = 68400\ N$$

$$u_{r_T} = \sqrt{\left(\frac{\partial r_T}{\partial r_d}\right)^2 {u_{r_d}}^2} \cong 360\ N$$

$r_T = (68400 \pm 360)N$
$r'_T = 68400N \pm 0{,}53\%$

Esercizio 2

Si chiede di valutare la misura dell'accelerazione di un carrello lungo un piano inclinato, noti modello, la lunghezza del piano ed alcune letture ripetute del tempo impiegato dal carrello a scendere. Inoltre è nota l'incertezza dello strumento con il quale è stata misurata la lunghezza. Si procede calcolando stima ed incertezza di categoria A della misura del tempo, tramite metodo probabilistico. In assenza di altre informazioni questa è l'unica fonte di incertezza per quello che riguarda il tempo. Essendo già note tutte le informazioni necessarie riguardo anche alla lunghezza si può poi passare a valutare direttamente l'accelerazione. Per la stima si utilizza il modello dato, per l'incertezza occorre ipotizzare le grandezze indipendenti, note le loro incertezze u_l e u_t, u_l<<l e u_t<<t, finite e calcolabili le derivate parziali dell'accelerazione rispetto a tempo e spazio (lunghezza).

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i = 3{,}70\ s$$

$$u_{t_A} = u_t = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2} \cong 0{,}058\ s$$

$$u_l = 0{,}005\ m$$

$$\bar{a} = \frac{2\ \bar{l}}{\bar{t}^2} \cong 0{,}73\frac{m}{s^2}$$

$$u_a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial l}\right)^2 u_l{}^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)^2 u_t{}^2} \cong 0{,}023\frac{m}{s^2}$$

$$a = (0{,}730 \pm 0{,}023)\frac{m}{s^2}$$

$$a = 0{,}73\frac{m}{s^2} \pm 3{,}11\%$$

L'incertezza nella misura del tempo è preponderante rispetto a quella dello spazio, di un ordine di grandezza. Come si nota dalle espressioni seguenti.

$u'_t \cong 0{,}02$
$u'_l \cong 0{,}001$

Per fare in modo di ottenere lo stesso ordine di grandezza occorre eseguire almeno 8 letture. Di seguito il ragionamento che porta a tale conclusione.

Partendo dall'espressione dell'incertezza si eleva al quadrato entrambi i membri.

$$u'_t = \frac{u_t}{\bar{t}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}}{\bar{t}} \cong 0{,}058$$

$$0{,}058^2 = \frac{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}{\bar{t}^2}$$

$$0{,}058^2 = \frac{1}{\bar{t}^2}\,\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2$$

Imponendo n = 5 letture ricavo il termine della sommatoria.

$$0{,}058^2\ \bar{t}^2\ [n(n-1)] = \sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2$$

$$0{,}058^2\ \bar{t}^2\ [5(5-1)] = \sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2 = 0{,}921\ s^2$$

Tale termine rimarrà sempre lo stesso, qualunque sia il numero di letture, ipotizzando che tutte queste nel loro insieme abbiano sempre la stessa distribuzione.
Imponendo adesso n = 8 letture e ricalcolando l'incertezza relativa si trova un valore dello stesso ordine di grandezza di u'_l.

$$u'_t = \frac{\sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(t_i-\bar{t})^2}}{\bar{t}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{8(8-1)}\,0{,}921}}{3{,}70^2} \cong 0{,}0026$$

Esercizio 3

Per la descrizione del procedimento conoscitivo sperimentale e del perché si misura, si rimanda al testo di riferimento.

Esercizio 4

Per la definizione dei termini richiesti in questo esercizio si rimanda al testo di riferimento.

Compito 4 Novembre 2010

Esercizio 1

Si chiede di valutare alcune misure indirette noti i modelli delle grandezze in gioco, le loro stime e le loro incertezze. Nel calcolo dell'incertezza occorre ipotizzare indipendenti le grandezze, note le loro incertezze, che ogni incertezza risulti molto minore della rispettiva stima, e che le derivate parziali della funzione del modello rispetto alle singole grandezze siano finite e calcolabili.

$a)\ \bar{U} = \bar{X}\sqrt{\bar{Y}} \cong 15{,}81;\ u_U = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 {u_X}^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y}\right)^2 {u_Y}^2} \cong 0{,}032;\ u'_U \cong 0{,}002$

$b)\ U = \frac{2Y}{\sqrt{X}}; U = (500{,}00 \pm 47{,}17\ ); U = 500 \pm 0{,}094\%$

$c)\ U = X^2 + Y^2; U = (125{,}0 \pm 10{,}2); U = 125 \pm 0{,}082\%$

Esercizio 2

Si chiede di stimare la misura di un diametro note alcune letture ripetute, l'accuratezza dello strumento e la presenza di un'ulteriore fonte di incertezza legata alla temperatura. Tramite metodo probabilistico è possibile calcolare stima ed incertezza di categoria A del diametro cercato. L'incertezza di categoria B si ricava dall'accuratezza dello strumento, una distribuzione dei valori uniforme. L'altra incertezza è legata alla temperatura di lavoro, ed aumenta per ogni grado centigrado all'infuori del range di lavoro standard indicato. Le tre incertezze trovate hanno tutte la stessa dimensione e possono essere sommate in quadratura tra loro per ottenere l'incertezza composta, necessaria alla valutazione della misura chiesta.

$$\bar{d} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d_i \cong 120{,}64mm$$
$$u_{d_A} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(d_i - \bar{d}\right)^2} \cong 0{,}12mm$$
$$u_{r_B} = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{01\%\left(\bar{d}\right) + 0{,}1}{\sqrt{3}} \cong 0{,}13mm$$
$$u_T = 0{,}01[0{,}01(40 - 30)] = 0{,}1mm$$
$$u_d = \sqrt{{u_{r_A}}^2 + {u_{r_B}}^2 + {u_T}^2} \cong 0{,}2mm$$
$$d = (120{,}6 \pm 0{,}2)mm$$
$$d = 120{,}6mm \pm 0{,}17\%$$

Esercizio 3

In questo esercizio si chiede di descrivere una misura effettuata attraverso metodo voltamperometrico e con ponte di Wheatstone. Per lo svolgimento si rimanda al testo di riferimento.

Esercizio 4

In questo esercizio si chiede di definire e discutere alcuni termini tipici della metrologia. Per lo svolgimento si rimanda al testo di riferimento.