Facoltà di Ingegneria
Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Misure Elettriche

- Inferenza statistica -

4. Test delle Ipotesi

Ing. Andrea Zanobini
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Introduzione alle ipotesi statistiche

Ci sono altri problemi in cui invece dobbiamo decidere se un'affermazione riguardante un parametro di una popolazione è vera o falsa.

Ad esempio il responsabile della produzione in un'azienda può ipotizzare che le confezioni prodotte abbiano un peso medio di 250g; un medico può ipotizzare che un certo farmaco sia efficace nel 90% dei casi in cui viene usato. Con la verifica delle ipotesi si può determinare se tali congetture sono compatibili con i dati disponibili dal campione.

Definizioni 1
Un'ipotesi formulata in termini di parametri di una popolazione, come media e varianza, è detta **ipotesi statistica**.
Il procedimento che consente di rifiutare o accettare un'ipotesi statistica utilizzando i dati di un campione, viene chiamato **test di ipotesi**.

Esempio 1
Si vuole sottoporre a test l'affermazione di un produttore di vernici secondo cui il tempo medio di asciugatura di una nuova vernice è $\mu = 20$ minuti.
A questo scopo si prende un campione di 35 lattine di vernice, si effettuano 35 prove di verniciatura con la vernice delle diverse confezioni e si calcola il tempo medio di asciugatura, con l'intenzione di rifiutare l'affermazione del produttore se la media osservata supera il valore di 20 minuti, o di accettarla in caso contrario.

Test di ipotesi

La verifica delle ipotesi statistiche inizia con la definizione del problema in termini di ipotesi sul parametro di interesse.

Per prima cosa si stabilisce l'ipotesi da sottoporre a test, detta **ipotesi nulla**, indicata con $\mathbf{H_0}$, ossia l'ipotesi che si ritiene vera fino a prova contraria.

Oltre all'ipotesi nulla occorre specificare anche un'adeguata **ipotesi alternativa**, indicata con $\mathbf{H_1}$, ossia un'affermazione che contraddice l'ipotesi nulla. Nell'esempio 1 l'ipotesi nulla è

$$H_0: \quad \mu \leq 20 \text{ minuti}$$

e l'ipotesi alternativa è

$$H_1: \quad \mu > 20 \text{ minuti.}$$

Esempio 2

Si vuole verificare se le lattine di caffè confezionate automaticamente da una ditta contengono in media il peso dichiarato $\mu = 250$ g.

A tale scopo si estrae un campione di 30 lattine, se ne pesa il contenuto e si calcola il peso medio, per stabilire se e quanto differisca da 250g, tenendo presente che il produttore avrebbe un danno sia vendendo lattine con un peso superiore, perché guadagnerebbe meno, sia con un peso inferiore, perché perderebbe i clienti.

Nell'esempio 2 l'ipotesi nulla è

$$H_0: \quad \mu = 250 \text{ g}$$

e l'ipotesi alternativa è

$$H_1: \quad \mu \neq 250 \text{ g.}$$

Altri Esempi

Esempio 4

Il contenuto dichiarato dal produttore delle bottiglie di acqua minerale di una certa marca è 920ml.
Un'associazione di consumatori sostiene che in realtà le bottiglie contengono in media una quantità inferiore di acqua.
L'ipotesi nulla è che il produttore non imbrogli, ossia

$$H_0: \quad \mu \geq 920 \text{ ml}$$

e l'ipotesi alternativa è

$$H_1: \quad \mu < 920 \text{ ml.}$$

Esempio 5

Un ingegnere suggerisce alcune modifiche che si potrebbero apportare a una linea produttiva per aumentare il numero di pezzi prodotti giornalmente.
Per decidere se applicare queste modifiche occorre che i dati sperimentali indichino con forte evidenza che la macchina modificata è più produttiva di quella originaria.
Se μ_0 è il numero medio di pezzi prodotti prima della modifica, si sceglie l'ipotesi nulla

$$H_0: \quad \mu \leq \mu_0$$

e l'ipotesi alternativa è

$$H_1: \quad \mu > \mu_0.$$

Osservazione
E' importante sottolineare che con la verifica delle ipotesi, e in generale con l'inferenza statistica, non si arriva alla dimostrazione di un'ipotesi; si ha solo un'indicazione del fatto che l'ipotesi sia o meno avvalorata dai dati disponibili: quando non si rifiuta un'ipotesi nulla, non si dice che essa è vera, ma che può essere vera; in altre parole se non rifiutiamo l'ipotesi nulla, possiamo solo concludere che il campione non fornisce prove sufficienti a garantirne il rifiuto, ma ciò non implica alcuna dimostrazione.

Tipi di errore e livello di significatività

Ricordiamo che una statistica campionaria, media o varianza, è uno stimatore corretto del corrispondente parametro della popolazione. Poiché il valore della statistica è calcolato da un campione, anche se l'ipotesi nulla è vera, è però molto probabile che la statistica differisca dal valore vero del parametro di una certa quantità, per effetto del caso; ciò nonostante, se l'ipotesi nulla è vera, ci aspettiamo che la statistica campionaria sia vicina al parametro della popolazione.

Analogamente, nel caso dell'esempio 2, se la media campionaria fosse di 245 g o di 255 g, potremmo ragionevolmente decidere di accettare l'ipotesi nulla che il peso medio sia $\mu = 250$ g, perché la differenza dal peso dichiarato è piccola; se invece la differenza dal peso medio fosse "troppo grande" potremmo decidere di rifiutare l'ipotesi.

Regione di rifiuto e di accettazione

In generale, utilizzando le proprietà della distribuzione di campionamento della statistica soggetta a test, si può identificare un intervallo di valori di quella statistica che verosimilmente non si presentano se l'ipotesi nulla è vera.

La distribuzione di campionamento della statistica test è, di solito, una distribuzione nota, come la normale o la distribuzione *t*, e ricorriamo a queste distribuzioni per sottoporre a verifica un'ipotesi nulla. La distribuzione di campionamento della statistica test è divisa in due regioni, una regione di rifiuto e una regione di accettazione, delimitate da uno o più valori, detti **valori critici**.

Definizioni 2
La **regione di rifiuto** corrisponde all'insieme dei valori di una statistica campionaria che conducono al rifiuto dell'ipotesi nulla.
L'insieme dei valori che portano invece all'accettazione dell'ipotesi nulla si chiama **regione di accettazione**.

Se la statistica test, in base ai dati del campione, assume un valore che cade nella regione di rifiuto, l'ipotesi nulla deve essere rifiutata; se al contrario il valore cade nella regione di accettazione, l'ipotesi nulla non può essere rifiutata.

Tipi di Errore

La regione di rifiuto può essere vista come l'insieme dei valori della statistica test che non è probabile che si verifichino quando l'ipotesi nulla è vera, mentre è probabile che si verifichino quando l'ipotesi nulla è falsa. Pertanto, se il campione porta a un valore della statistica test che cade nella regione di rifiuto, rifiutiamo l'ipotesi nulla perché non è probabile che sia vera.

Quando si usa una statistica campionaria per prendere una decisione sul parametro della popolazione si corre sempre il rischio di giungere a una conclusione sbagliata. In effetti nella verifica di ipotesi si individuano due **tipi di errore**.

↓

Per illustrare questo problema riprendiamo in esame l'esempio 1. Supponiamo di aver scelto la regione di accettazione, stabilendo di accettare l'ipotesi nulla se la media del campione non supera i 20.50 minuti.

C'è una prima possibilità che la media del campione superi i 20.50 minuti stabiliti, mentre la media effettiva della popolazione è $\mu = 20$ minuti; c'è anche una seconda possibilità che la media del campione possa essere minore o uguale a 20.50 minuti, ma la media effettiva non sia $\mu = 20$ minuti, ma sia ad esempio $\mu = 21$ minuti.

Errori del I e del II tipo

Definizioni 3
Se l'ipotesi H_0 è vera, ma viene erroneamente rifiutata, si commette un **errore del I tipo**; la probabilità di commettere tale errore è indicata con α.
Se l'ipotesi H_0 è falsa, ma erroneamente viene accettata, si commette un **errore del II tipo**; la probabilità di commettere questo tipo di errore è indicata con β.

	H_0 vera	H_0 falsa
Rifiutiamo H_0	Errore del I tipo Probabilità = α	Decisione corretta
Accettiamo H_0	Decisione corretta	Errore del II tipo Probabilità = β

Analogia per capire...

Un'analogia che può chiarire le idee precedenti è quella del processo a un imputato. In tribunale una persona sottoposta a processo viene ritenuta innocente fino a prova contraria. L'ipotesi nulla H_0 è quindi "l'imputato è innocente"; l'ipotesi alternativa H_1 è "l'imputato è colpevole".
L'errore del I tipo è condannare un innocente, l'errore del II tipo è assolvere un colpevole.

	Imputato innocente	Imputato colpevole
Imputato condannato	Errore del I tipo	Decisione corretta
Imputato assolto	Decisione corretta	Errore del II tipo

Scegliere come ipotesi nulla H_0 "l'imputato è innocente" significa ritenere che condannare un innocente sia un errore più grave che assolvere un colpevole.

In generale l'errore di I tipo è quello considerato più grave: questo significa che l'ipotesi nulla H_0 va formulata in modo che quello che si ritiene sia l'errore più grave coincida con l'errore di I tipo.

Esempio 1 – parte 2
Assumiamo che sia noto dall'esperienza che lo scarto quadratico medio del tempo di asciugatura della vernice è $\sigma = 2$ minuti e studiamo la probabilità di commettere un errore del I tipo, ossia la probabilità α che la media del campione superi 20.5 minuti, anche se la media effettiva della popolazione è $\mu = 20$ minuti[1].

Come è noto dal Cap. 6, la distribuzione della media campionaria per grandi campioni ($n \geq 30$) è approssimativamente normale, quindi la probabilità suddetta è data dall'area della regione rappresentata nella figura 1

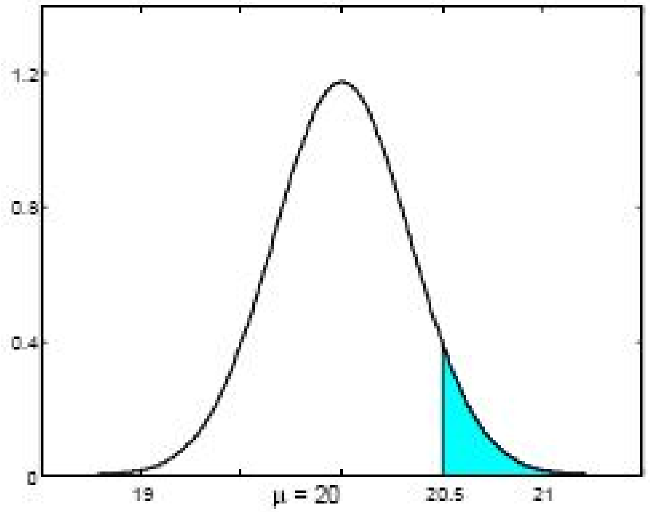
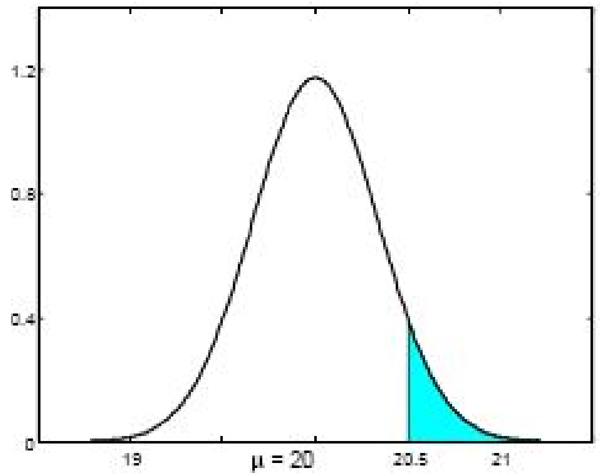


Figura 1

La regione a destra del valore 20.5 è la regione di rifiuto, quella a sinistra è la regione di accettazione: se il valore della media campionaria cade a destra di 20.5 l'ipotesi nulla viene rifiutata, altrimenti non viene rifiutata.

Esempio 1 – parte 2

continua…



Se la popolazione da cui proviene il campione è sufficientemente grande da poterla considerare infinita[2], applicando il teorema 1, Cap. 6, pag. 171, si calcola la deviazione standard della distribuzione della media campionaria

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{35}} = 0.34$$

Standardizzando il valore $\bar{x} = 20.5$ si ha

$$Z = \frac{20.5 - 20}{0.34} = 1.47\,.$$

Utilizzando le tavole della distribuzione normale, si trova che l'area della regione a destra di 20.5 è

$$P(Z > 1.47) = 1 - P(Z < 1.47) = 1 - 0.9292 = 0.0708$$

quindi la probabilità di rifiutare erroneamente l'ipotesi nulla è

$$\alpha = 0.0708$$

Fare da soli l' esempio 2 – parte 2!!

Test a una e due code

Quando la regione di rifiuto è costituita da un intervallo (come accade nell'esempio 1, parte 2), il **test** si dice **unilaterale** o anche **test a una coda**; quando invece la regione di rifiuto è costituita da due intervalli, ossia da due code della distribuzione (come accade nell'esempio 2, parte 2), il **test** si dice **bilaterale** o anche **test a due code**.

Definizione 4
La probabilità α di commettere un errore del I tipo, ossia di rifiutare un'ipotesi nulla vera, è detta **livello di significatività**.

Poiché l'errore di I tipo è quello considerato più grave, si scelgono per α valori piccoli; i valori più usati sono $\alpha = 0.01$ e $\alpha = 0.05$.

In corrispondenza al livello di significatività α, il valore $(1-\alpha)\cdot 100\%$ coincide con il **grado di fiducia** già introdotto a proposito degli intervalli di confidenza.
Se si sceglie ad esempio un livello di significatività $\alpha = 0.05$, ossia del 5%, ci sarà una probabilità del 5% di rifiutare un'ipotesi che avrebbe dovuto essere accettata; in altre parole siamo fiduciosi al 95% di aver preso la decisione giusta.

Definizione 5
La probabilità di commettere un errore del II tipo, indicata con β, viene anche chiamata **rischio del consumatore**.

Potenza del Test

Si può controllare il rischio connesso a un errore del I tipo scegliendo un valore di α piccolo, ad esempio $\alpha = 0.01$: questo deve essere fatto se si ritiene che le conseguenze di un errore del I tipo siano gravi. Tuttavia al diminuire di α, aumenta β, ossia ad una riduzione dell'errore del I tipo si accompagna un aumento dell'errore del II tipo. Quindi nei casi in cui è molto importante evitare, per quanto possibile, un errore del II tipo, è meglio scegliere come valore di α un valore non troppo piccolo, ad esempio $\alpha = 0.05$.

Per un fissato valore di α l'aumento dell'ampiezza del campione riduce il rischio del consumatore β, quindi aumenta la probabilità $1 - \beta$ di rifiutare l'ipotesi nulla quando è falsa, e quindi dovrebbe essere rifiutata. La probabilità $1 - \beta$ si chiama anche **potenza del test**.

Schema riassuntivo – Test di ipotesi

1 – Si scelgono l'ipotesi nulla e l'ipotesi alternativa.

2 – Si sceglie il livello di significatività α a cui si vuole eseguire il test.

3 – In funzione del valore α scelto, si determina la regione di rifiuto.

4 – Si calcola dai dati del campione il valore della statistica test e si vede se appartiene o no alla regione di rifiuto.

5 – Si prende la decisione: rifiutare o non rifiutare l'ipotesi nulla al livello di significatività stabilito.

Osservazione Importante

E' opportuno sottolineare che, quando l'ipotesi nulla non è rifiutata, non si dovrebbe dire che tale ipotesi viene accettata, bensì che l'ipotesi nulla non viene rifiutata: questo perché è possibile che di commetta un errore del II tipo; poiché spesso la probabilità di commettere un errore del II tipo è abbastanza elevata, non ci si dovrebbe impegnare troppo dicendo che si accetta l'ipotesi nulla. Tuttavia, anche se impropriamente, spesso si usa il termine "si accetta l'ipotesi nulla".

Test di ipotesi sulla media (varianza nota)

Il test si basa sulla statistica

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

dove n è l'ampiezza del campione e μ_0 è il valore della media assunto nell'ipotesi nulla

$$H_0: \qquad \mu = \mu_0.$$

Il test qui illustrato è essenzialmente un **test per grandi campioni** ($n \geq 30$); in tal caso la distribuzione della media campionaria può essere approssimata dalla distribuzione normale e la variabile aleatoria Z ha approssimativamente la distribuzione normale standardizzata.

Nel caso particolare in cui il campione è estratto da una popolazione con distribuzione normale, la variabile Z ha distribuzione normale standardizzata, qualunque sia l'ampiezza del campione

L'ipotesi nulla è

$$H_0: \qquad \mu = \mu_0.$$

Nei primi due casi si fa un test a una coda, nel terzo caso un test a due code.

1° caso – Test a una coda (figura 3)

Ipotesi alternativa H_1: $\mu > \mu_0$.

Regione di rifiuto[4] $Z > z_\alpha$

Regione di accettazione $Z < z_\alpha$

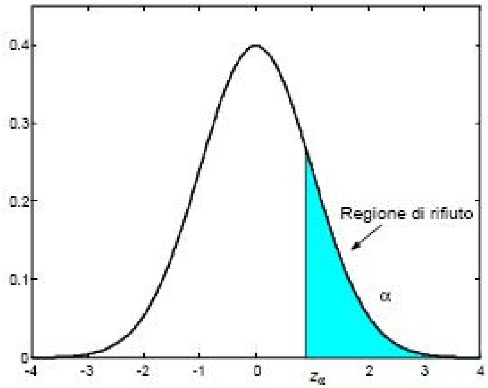


Figura 3

2° caso – Test a una coda (figura 4)

Ipotesi alternativa H_1: $\mu < \mu_0$.

Regione di rifiuto $Z < -z_\alpha$

Regione di accettazione $Z > -z_\alpha$

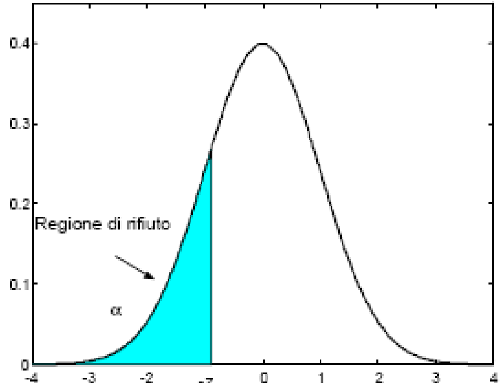


Figura 4

3° caso – Test a due code (figura 5)

Ipotesi alternativa H_1: $\mu \neq \mu_0$.

Regione di rifiuto $Z < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ oppure $Z > z_{\frac{\alpha}{2}}$

Regione di accettazione $-z_{\frac{\alpha}{2}} < Z < z_{\frac{\alpha}{2}}$

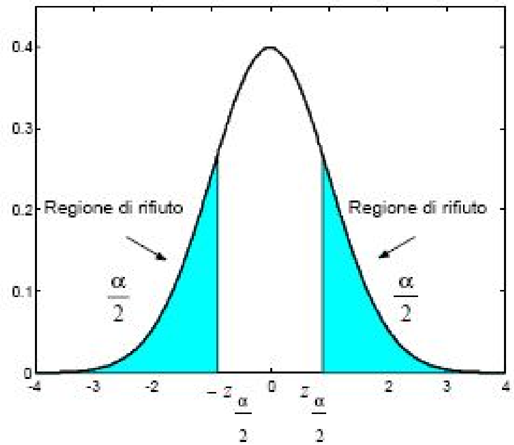


Figura 5

I valori z_α e $z_{\frac{\alpha}{2}}$ sono i valori critici del test nei tre casi; tali valori possono essere letti sulla tabella dei percentili della distribuzione normale standardizzata.
Nella tabella 1 riassumiamo i valori comunemente usati per il livello di significatività α e i corrispondenti valori critici z_α e $z_{\frac{\alpha}{2}}$ per i test a una e a due code. L'ipotesi nulla è

$$H_0: \qquad \mu = \mu_0.$$

Test	Ipot. altern. H_1	Liv. signif. α	Valori critici	Reg. rifiuto
una coda	$\mu > \mu_0$	0.01	2.326	$Z > 2.326$
		0.05	1.645	$Z > 1.645$
una coda	$\mu < \mu_0$	0.01	−2.326	$Z < -2.326$
		0.05	−1.645	$Z < -1.645$
due code	$\mu \neq \mu_0$	0.01	−2.576 e 2.576	$Z < -2.576$ $Z > 2.576$
		0.05	−1.96 e 1.96	$Z < -1.96$ $Z > 1.96$

Tabella 1

Esempio 6

Una ditta produttrice di lampadine sostiene che la durata media delle lampadine prodotte è di 1600 ore, con uno scarto quadratico medio $\sigma = 120$ ore.

Estraendo un campione di 100 lampadine si è calcolata una durata media di 1570 ore.

Stabilire se l'affermazione del produttore è corretta, usando come ipotesi alternativa che la durata media sia

a – inferiore a quella dichiarata;

b – diversa da quella dichiarata.

Usare in entrambi i casi il livello di significatività $\alpha = 0.05$ e il livello di significatività $\alpha = 0.01$.

a –

Ipotesi nulla	H_0:	$\mu = 1600$
Ipotesi alternativa	H_1:	$\mu < 1600$
Livello di significatività	$\alpha = 0.05$	

Il test è a una coda; il valore critico per questo livello di significatività è $z_\alpha = -1.645$.

La regola di decisione consiste nel rifiutare l'ipotesi se il valore della statistica Z ottenuto dai dati del campione è minore di -1.645.

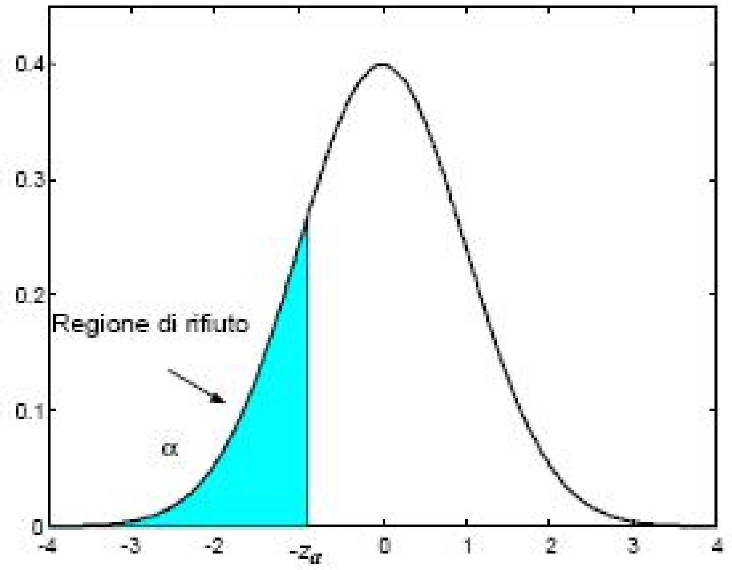
Il campione ha le seguenti caratteristiche

$$n = 100 \qquad \bar{x} = 1570$$

Il valore della statistica test è

$$Z = \frac{1570 - 1600}{\frac{120}{\sqrt{100}}} = -2.50 \,.$$

Esempio 6 continua...

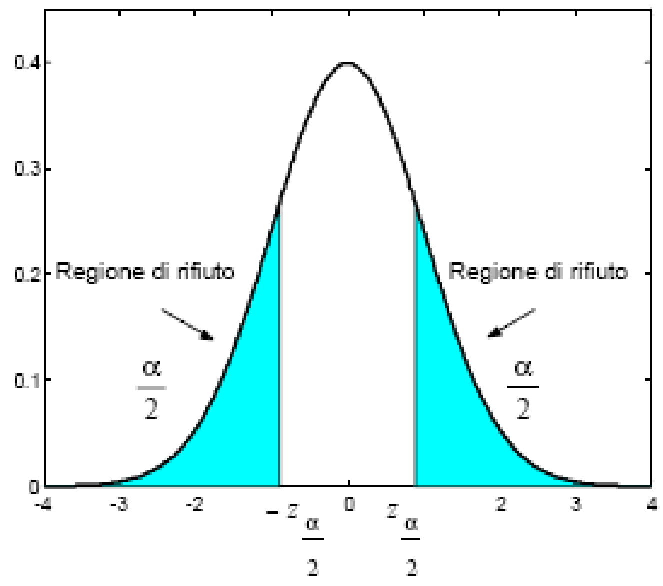


Dato che il valore trovato $Z = -2.50$ è minore del valore critico $z_\alpha = -1.645$, si rifiuta l'ipotesi nulla al livello di significatività $\alpha = 0.05$, ossia del 5%.

Livello di significatività $\alpha = 0.01$
Il test è a una coda; il valore critico per questo livello di significatività è $z_\alpha = -2.326$.
Anche in questo caso il valore $Z = -2.50$ è minore del valore critico $z_\alpha = -2.326$, perciò si rifiuta l'ipotesi nulla al livello di significatività $\alpha = 0.01$, ossia dell'1%.

Esempio 6 continua...

b – diversa da quella dichiarata.



b –

Ipotesi nulla	H_0:	$\mu = 1600$
Ipotesi alternativa	H_1:	$\mu \neq 1600$
Livello di significatività	$\alpha = 0.05$	

Il test è a due code; i valori critici per questo livello di significatività sono

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = -1.96 \text{ e } z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96 .$$

Il valore $Z = -2.50$ cade al di fuori dell'intervallo avente come estremi i valori critici, cioè appartiene alla regione di rifiuto, perciò si rifiuta l'ipotesi nulla al livello di significatività $\alpha = 0.05$, ossia del 5%.

Livello di significatività $\alpha = 0.01$.

I valori critici per questo livello di significatività sono $z_{\frac{\alpha}{2}} = -2.576$ e $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.576$.

Il valore $Z = -2.50$ cade fra questi estremi, perciò non si rifiuta l'ipotesi nulla al livello di significatività $\alpha = 0.01$, ossia dell'1%.

Esempio 7

La lunghezza della corda contenuta nei rotoli prodotti da una macchina ha una distribuzione avente varianza $\sigma^2 = 27.4\,\text{m}^2$. La ditta produttrice afferma che la lunghezza media è $\mu = 300$m.

Viene prelevato un campione di 100 rotoli e calcolata la lunghezza media, pari a $\bar{x} = 299.2$.

Verificare se il produttore afferma il vero, oppure se la lunghezza è inferiore, al livello di significatività dell'1%.

Ipotesi nulla	H_0:	$\mu = 300$
Ipotesi alternativa	H_1:	$\mu < 300$
Livello di significatività	$\alpha = 0.01$.	

Il test è a una coda; il valore critico per questo livello di significatività è $z_\alpha = -2.326$. La regione di rifiuto è $z < -2.326$.

Si ha

$$n = 100 \qquad \bar{x} = 299.2$$

$$\sigma^2 = 27.4$$

Il valore della statistica test è

$$Z = \frac{299.2 - 300}{\frac{\sqrt{27.4}}{\sqrt{100}}} = -1.53\,.$$

Il valore $Z = -1.53$ appartiene alla regione di accettazione, quindi l'ipotesi nulla viene accettata al livello di significatività dell'1%.

Fare da soli l'esempio 8!!

Esempio 9
I carichi di rottura dei cavi prodotti da un'azienda hanno una media pari a 1800kg e uno scarto quadratico medio di 100kg. Si afferma che mediante una nuova tecnica di costruzione il carico di rottura può essere reso maggiore. Per sottoporre a test questa affermazione si provano 50 cavi e si trova che il carico di rottura medio è di 1850kg.
E' possibile accettare l'affermazione ad un livello di significatività dell'1%?

Si assume come ipotesi nulla che non ci sia nessun cambiamento

$$H_0: \quad \mu = 1800$$

e come ipotesi alternativa che ci sia un aumento nel carico di rottura, ossia

$$H_1: \quad \mu > 1800.$$

Si effettua un test ad una coda; per il livello di significatività $\alpha = 0.01$ il valore critico è $z_\alpha = 2.326$ e la regione di rifiuto è costituita dai valori $Z > 2.326$.

Fare da soli l' esempio 10!!

Il valore della statistica test è

$$Z = \frac{1850 - 1800}{\frac{100}{\sqrt{50}}} = 3.54 \,.$$

Dato che il valore trovato $Z = 3.54$ è maggiore del valore critico $z_\alpha = 2.326$, appartiene alla regione di rifiuto, perciò l'ipotesi nulla deve essere rifiutata al livello di significatività $\alpha = 0.01$, e concludiamo che l'affermazione non può essere rifiutata.

Esempio 11

Una ditta produttrice di pneumatici afferma che la durata media di un certo tipo di pneumatici per auto è di almeno 50000km.

Per sottoporre a test questa affermazione un campione di 40 pneumatici viene sottoposto a prove su strada e si misura una durata media $\bar{x} = 48900$ km, con uno scarto quadratico medio $s = 2500$km.

Sottoporre a test l'affermazione, con un livello di significatività $\alpha = 0.01$.

L'ipotesi nulla è

$$H_0: \quad \mu \geq 50000$$

e l'ipotesi alternativa è

$$H_1: \quad \mu < 50000.$$

Si effettua un test ad una coda e, dato che la probabilità di un errore del I tipo è massima quando $\mu = 50000$, si procede come se l'ipotesi nulla fosse

$$H_0: \quad \mu = 50000$$

Per il livello di significatività $\alpha = 0.01$ il valore critico è $z_\alpha = -2.326$ e la regione di rifiuto è costituita dai valori $Z < -2.326$.

Lo scarto quadratico medio della popolazione non è noto e viene sostituito con lo scarto quadratico medio del campione.

Il valore della statistica test è

$$Z = \frac{48900 - 50000}{\frac{2500}{\sqrt{40}}} = -2.78\,.$$

Fare da soli l' esempio 12!!

Il valore $Z = -2.78$ appartiene alla regione di rifiuto, perciò l'ipotesi nulla deve essere rifiutata al livello di significatività $\alpha = 0.01$, e concludiamo che l'affermazione del produttore non può essere accettata.

Esempio 13
Supponiamo che i punteggi di un test sul quoziente di intelligenza di una certa popolazione di adulti si distribuiscano normalmente con uno scarto quadratico medio $\sigma = 15$.
Un campione di 25 adulti estratti da questa popolazione ha un punteggio medio di 105.
Sottoporre a test l'ipotesi che il punteggio medio sia 100, con un livello di significatività del 5%.

Poiché la popolazione da cui proviene il campione ha distribuzione normale con scarto quadratico medio noto $\sigma = 15$, quanto detto per i grandi campioni è valido anche per un piccolo campione.
L'ipotesi nulla è

$$H_0: \quad \mu = 100$$

e l'ipotesi alternativa è

$$H_1: \quad \mu \neq 100.$$

Si effettua un test a due code; per il livello di significatività $\alpha = 0.05$ la regione di rifiuto è costituita dai valori $Z < -1.96$ e $Z > 1.96$.

Il valore della statistica test è

$$Z = \frac{105 - 100}{\frac{15}{\sqrt{25}}} = 1.67 .$$

Fare da soli esempio 14!!

Usando MINITAB

Il valore $Z = 1.67$ non appartiene alla regione di rifiuto, perciò si decide di non rifiutare l'ipotesi nulla.

P-value

Definizione 6
In un test di ipotesi, dopo aver effettuato il campionamento e calcolato il valore della statistica necessaria per eseguire il test, si dice ***P*-value** il più piccolo valore del livello di significatività a cui i dati campionari consentono di rifiutare l'ipotesi nulla.

Un *P*-value quasi uguale a zero significa che siamo praticamente certi di non sbagliare rifiutando l'ipotesi nulla; un *P*-value dell'ordine dei soliti livelli di significatività è imbarazzante, in quanto indica che la decisione se rifiutare o no l'ipotesi nulla è critica, dipende in modo cruciale dalla scelta del livello di significatività; un *P*-value molto maggiore indica invece che a qualsiasi livello ragionevole di significatività, non rifiutiamo l'ipotes dire che il test ci porta ad accettare l'ipotesi.

Fai 8 con p-value

Fare da soli esempio 15

Per i test basati sulla distribuzione normale, com value è relativamente facile da calcolare. Se Z_0 è il valore ai dati campionari, allora il *P*-value può essere ottenuto in ba

$$P-\text{value}=\begin{cases}1-P(Z<Z_0) & \text{per il test a una coda con} \quad H_0:\mu=\mu_0 \quad H_1:\mu>\mu_0\\ P(Z<Z_0) & \text{per il test a una coda con} \quad H_0:\mu=\mu_0 \quad H_1:\mu<\mu_0\\ 2\left[1-P(Z<|Z_0|)\right] & \text{per il test a due code con} \quad H_0:\mu=\mu_0 \quad H_1:\mu\neq\mu_0\end{cases}$$

Test di ipotesi sulla media (varianza incognita)

Come già osservato nel paragrafo precedente, se σ non è noto, ma il campione è grande, si può sostituire σ con il valore s dello scarto quadratico medio del campione.

Se invece il campione è piccolo, e la popolazione da cui proviene il campione ha distribuzione normale, o almeno approssimativamente normale, si può usare il teorema 3, Cap. 6; sulla base di tale teorema la statistica

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

è una variabile aleatoria avente la distribuzione t con grado di libertà $\nu = n - 1$.

I criteri per i test a una e a due code basati sull'uso di questa distribuzione sono analoghi a quelli già descritti nel paragrafo precedente, con z_α e $z_{\frac{\alpha}{2}}$ sostituiti da t_α e $t_{\frac{\alpha}{2}}$; questi valori critici per un dato livello di significatività α dipendono dal grado di libertà e devono essere letti di volta in volta sulle tavole della distribuzione t.

Test di ipotesi sulla media (varianza incognita)

Livelli di significatività e Valori critici

H$_0$: $\mu = \mu_0$.

Test	Ipot. altern. H_1	Liv. signif. α	Valori critici	Reg. rifiuto
una coda	$\mu > \mu_0$	0.01	$t_\alpha = t_{0.01}$	$T > t_{0.01}$
		0.05	$t_\alpha = t_{0.05}$	$T > t_{0.05}$
una coda	$\mu < \mu_0$	0.01	$t_\alpha = -t_{0.01}$	$T < -t_{0.01}$
		0.05	$t_\alpha = -t_{0.05}$	$T < -t_{0.05}$
due code	$\mu \neq \mu_0$	0.01	$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.005}$ $t_{\frac{\alpha}{2}} = -t_{0.005}$	$T > t_{0.005}$ $T < -t_{0.005}$
		0.05	$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{0.025}$ $t_{\frac{\alpha}{2}} = -t_{0.025}$	$T > t_{0.025}$ $T < -t_{0.025}$

Esempio 16

Le bottiglie di vino poste in vendita contengono usualmente 750ml di vino.
Si effettua un controllo su un campione di 6 bottiglie e si misurano i seguenti valori in ml

747.0	751.5	752.0	747.5	747.0	749.0

Stabilire se questi dati confermano con un livello di significatività del 5% l'affermazione che le bottiglie hanno un contenuto in media pari a quanto dichiarato.

Se il test è effettuato per tutelare l'interesse del consumatore, l'ipotesi nulla è

$$H_0: \quad \mu = 750$$

e l'ipotesi alternativa è

$$H_1: \quad \mu < 750.$$

Dal campione si calcolano:
Media=749.0 ml
Varianza=5.1 ml

Il valore della statistica test è

$$T = \frac{749.0 - 750}{\frac{\sqrt{5.1}}{\sqrt{6}}} = -1.08 .$$

Il test è a una coda, e per il livello di significatività del 5% e il grado di libertà $\nu = 5$ il valore critico è

$$t_\alpha = -t_{0.05} = -2.015$$

Fare da soli esempio 17!!

La regione di rifiuto è data dai valori $T < -2.015$.
Il valore $T = -1.08$ appartiene alla regione di accettazione, perciò non c'è un'evidenza significativa, al livello del 5%, che le bottiglie contengano meno di 750ml di vino.

Esempio 18

Si estrae un campione di 8 confezioni di detersivo in polvere da una grossa produzione. I pesi in g delle 8 confezioni sono

1998.5	2000.4	1999.9	2005.8
2011.5	2007.6	2001.3	2002.4

Assumendo che popolazione da cui proviene il campione abbia distribuzione normale, verificare se al livello di significatività del 5%, si può affermare che il peso medio delle confezioni di questa produzione è maggiore di 2000g.

Dal campione si calcolano:
Media=2003.4 g
Varianza=19.95 g

L'ipotesi nulla è

$$H_0: \quad \mu = 2000$$

e l'ipotesi alternativa è

$$H_1: \quad \mu > 2000.$$

Il valore della statistica test è

$$T = \frac{2003.4 - 2000}{\frac{\sqrt{19.95}}{\sqrt{8}}} = 2.153\,.$$

Il test è a una coda, e per il livello di significatività del 5% e il grado di libertà $\nu = n - 1 = 7$, il valore critico è

$$t_\alpha = t_{0.05} = 1.895$$

Fare da soli esempio 19!!

La regione di rifiuto è data dai valori $T > 1.895$. Il valore $T = 2.153$ appartiene alla regione di rifiuto, perciò rifiutiamo l'ipotesi nulla e concludiamo che c'è una significativa evidenza, al livello del 5%, che il contenuto delle scatole sia maggiore di 2000g.

Test di ipotesi sulla proporzione

Per risolvere problemi di questo tipo si conta il numero X di volte in cui la caratteristica osservata si presenta nel campione di ampiezza n e si calcola la proporzione campionaria: in altre parole si osserva il numero di successi in n prove o proporzione di successi; si ha quindi a che fare con la distribuzione binomiale e si fa un test di ipotesi sul parametro p di una popolazione binomiale.

Quando il numero n di elementi del campione è sufficientemente grande, il test di ipotesi sulla proporzione può essere basato sulla distribuzione normale.
E' infatti noto che, indicando con p la proporzione di successi in n prove bernoulliane, se si verifica che $np \geq 5$ e $n(1-p) \geq 5$, la distribuzione binomiale di parametri n e p può essere approssimata

Per sottoporre a test l'ipotesi nulla

$$H_0: \quad p = p_0$$

si utilizza la statistica

$$Z = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}$$

Test di ipotesi sulla proporzione

Livelli di significatività e Valori critici

H$_0$: $p = p_0$.

Test	Ipot. altern. H$_1$	Liv. signif. α	Valori critici	Reg. rifiuto
una coda	$p > p_0$	0.01	2.326	$Z > 2.326$
		0.05	1.645	$Z > 1.645$
una coda	$p < p_0$	0.01	-2.326	$Z < -2.326$
		0.05	-1.645	$Z < -1.645$
due code	$p \neq p_0$	0.01	-2.576 e 2.576	$Z < -2.576$ $Z > 2.576$
		0.05	-1.96 e 1.96	$Z < -1.96$ $Z > 1.96$

Esempio 20

Si effettuano 500 lanci di una moneta e si ottiene 267 volte testa.

a – Decidere se la moneta è truccata oppure no, con un livello di significatività del 5%.

b – Ripetere il calcolo nel caso che il numero di volte in cui si ottiene testa sia 280.

Per una moneta non truccata la probabilità che esca testa è 0.5.
L'ipotesi nulla è quindi

$$H_0: \quad p = p_0 = 0.5$$

e l'ipotesi alternativa è

$$H_1: \quad p \neq 0.5.$$

Si effettua un test a due code con il livello di significatività $\alpha = 0.05$; la regione di rifiuto è costituita dai valori $Z < -1.96$ e $Z > 1.96$.

a – Si ha

$$n = 500 \qquad x = 267 \qquad p_0 = 0.5$$

$$Z = \frac{267 - 500 \cdot 0.5}{\sqrt{500 \cdot 0.5 \cdot 0.5}} = 1.52$$

Il valore $Z = 1.52$ cade nella regione di accettazione, perciò l'ipotesi nulla non può essere rifiutata; in conclusione la moneta non può ritenersi truccata, al livello di significatività del 5%.

Esempio 20 continua...

Esempio 20

Si effettuano 500 lanci di una moneta e si ottiene 267 volte testa.

a – Decidere se la moneta è truccata oppure no, con un livello di significatività del 5%.

b – Ripetere il calcolo nel caso che il numero di volte in cui si ottiene testa sia 280.

Per una moneta non truccata la probabilità che esca testa è 0.5. L'ipotesi nulla è quindi

$$H_0: \quad p = p_0 = 0.5$$

e l'ipotesi alternativa è

$$H_1: \quad p \neq 0.5.$$

b – Si ha

$$n = 500 \qquad x = 280 \qquad p_0 = 0.5$$

$$Z = \frac{280 - 500 \cdot 0.5}{\sqrt{500 \cdot 0.5 \cdot 0.5}} = 2.68$$

Il valore $Z = 2.68$ cade nella regione di rifiuto, perciò l'ipotesi nulla deve essere rifiutata; in conclusione la moneta può ritenersi truccata, al livello di significatività del 5%.

Fare da soli esempio 21!!

Esempio 22

Un fabbricante dichiara che almeno il 95% della merce fornita a una ditta è conforme alle esigenze del cliente.
Un esame di un campione di 200 esemplari della merce rivela che 18 esemplari sono difettosi.
Sottoporre a test la dichiarazione del fabbricante al livello di significatività $\alpha = 0.01$ e $\alpha = 0.05$.

Fare da soli l'esempio 23 !!

Si assume come ipotesi nulla

$$H_0: \quad p = 0.95$$

e come ipotesi alternativa

$$H_1: \quad p < 0.95.$$

Si effettua un test a una coda e si ha

$$n = 200 \qquad 200 - x = 18 \qquad x = 182 \qquad p_0 = 0.95$$

$$Z = \frac{182 - 200 \cdot 0.95}{\sqrt{200 \cdot 0.95 \cdot (1 - 0.95)}} = -2.60$$

a – Per il livello di significatività $\alpha = 0.01$ la regione di rifiuto è data dai valori $Z < -2.326$.
Il valore $Z = -2.60$ cade nella regione di rifiuto, perciò si rifiuta l'ipotesi nulla, al livello di significatività dell'1%, concludendo che l'affermazione del fabbricante è falsa.

b – Per il livello di significatività $\alpha = 0.05$ la regione di rifiuto è data dai valori $Z < -1.645$.
Il valore $Z = -2.60$ cade nella regione di rifiuto, perciò anche per questo livello di significatività si rifiuta l'ipotesi nulla, concludendo che l'affermazione del fabbricante è falsa.

Esempio 24

Un lotto di 5000 pezzi viene ritenuto inaccettabile se contiene più dell'8% di pezzi difettosi.
Per decidere se accettarlo o no, si esamina un campione di 100 pezzi e se ne trovano 9 difettosi: il lotto va accettato o rifiutato al livello di significatività del 5%?

Ponendoci dal punto di vista dell'acquirente l'errore più grave è acquistare un prodotto non accettabile, quindi si assume come ipotesi nulla

$$H_0: \quad p \geq 0.08$$

e come ipotesi alternativa

$$H_1: \quad p < 0.08.$$

Il valore $Z = 0.37$ cade nella regione di accettazione, perciò al livello di significatività dell'1% si accetta l'ipotesi nulla e il prodotto non deve essere acquistato.

Ponendoci invece dal punto di vista del produttore, l'errore più grave è non vendere un lotto accettabile, perciò si assume come ipotesi nulla

$$H_0: \quad p \leq 0.08$$

e come ipotesi alternativa

$$H_1: \quad p > 0.08.$$

Il valore $Z = 0.37$ cade nella regione di accettazione, perciò al livello di significatività dell'1% si accetta l'ipotesi nulla e il prodotto viene ritenuto vendibile.

In casi come questo è determinante, nella decisione che si prende, il presupposto da cui si parte; nel nostro caso il punto di vista acquirente o venditore, ossia la scelta di H_0 e H_1.
In altre parole la scelta di quale siano H_0 e H_1 non è puramente formale, ma comporta un giudizio sul problema in esame non privo di implicazioni.

Test di ipotesi sulla varianza e sullo scarto quadratico medio

Studiamo ora come effettuare un test sulla varianza, ossia come stabilire se la varianza di una popolazione è uguale a un dato valore σ_0^2. Questo tipo di test è utile quando si studia la variabilità di un prodotto, di un processo o di un'operazione.

Il test sull'ipotesi nulla

$$H_0: \qquad \sigma^2 = \sigma_0^2$$

è basato sulle stesse ipotesi già richieste per gli intervalli di confidenza per la varianza. Si suppone che il campione di n elementi provenga da una popolazione avente la distribuzione normale e si usa come statistica la variabile

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$$

che ha la distribuzione χ^2 con grado di libertà $\nu = n - 1$.

Si noti che per il test a due code si usano code di uguale ampiezza, come nel caso degli intervalli di confidenza per la varianza.

Test di ipotesi sulla varianza e sullo scarto quadratico medio

Livelli di significatività e Valori critici

Test	Ipot. altern. H_1	Liv. signif. α	Valori critici	Reg. rifiuto
una coda	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	0.01	$\chi_\alpha^2 = \chi_{0.01}^2$	$\chi^2 > \chi_{0.01}^2$
		0.05	$\chi_\alpha^2 = \chi_{0.05}^2$	$\chi^2 > \chi_{0.05}^2$
una coda	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	0.01	$\chi_{1-\alpha}^2 = \chi_{0.99}^2$	$\chi^2 < \chi_{0.99}^2$
		0.05	$\chi_{1-\alpha}^2 = \chi_{0.95}^2$	$\chi^2 < \chi_{0.95}^2$
due code	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	0.01	$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 = \chi_{0.995}^2$ $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2 = \chi_{0.005}^2$	$\chi^2 < \chi_{0.995}^2$ $\chi^2 > \chi_{0.005}^2$
		0.05	$\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 = \chi_{0.975}^2$ $\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2 = \chi_{0.025}^2$	$\chi^2 < \chi_{0.975}^2$ $\chi^2 > \chi_{0.025}^2$

Esempio 36

E' noto che una certa popolazione normale ha media $\mu = 44$ e varianza $\sigma^2 = 22.5$

Da un'altra popolazione viene estratto il campione

16	10	12	8	0	12	10	6	10	8	4	2

Si può concludere al livello di significatività del 5% che le due popolazioni hanno la stessa varianza?

L'ipotesi nulla e l'ipotesi alternativa sono

$$H_0: \quad \sigma^2 = 22.5$$

$$H_0: \quad \sigma^2 \neq 22.5 .$$

Fare da soli l' esempio 37!!

Dai dati del campione si calcola la varianza campionaria $s^2 = 20.697$. Il valore della statistica test è

$$\chi^2 = \frac{11 \cdot 20.697}{22.5} = 10.12$$

Il test è a due code e la regione di rifiuto è $\chi^2 < \chi^2_{0.975}$ e $\chi^2 > \chi^2_{0.025}$; al livello di significatività del 5% e per il grado di libertà $\nu = 11$, sulle tavole della distribuzione χ^2 si trova

$$\chi^2_{0.975} = 3.816 \qquad \chi^2_{0.025} = 21.920$$

Il valore $\chi^2 = 10.12$ appartiene alla regione di accettazione, perciò l'ipotesi nulla non viene rifiutata, e si decide che le varianze delle due popolazioni sono uguali.

Esempio 38
Lo scarto quadratico medio delle temperature annuali di una città in un periodo di 100 anni è stato di 8°C. Misurando la temperatura media del quindicesimo giorno di ogni mese durante gli ultimi 15 anni si è riscontrato che lo scarto quadratico medio delle temperature annuali è stato di 5°C. Sottoporre a test l'ipotesi che la temperatura della città sia diventata meno variabile che in passato, usando i livelli di significatività $\alpha = 0.05$ e $\alpha = 0.01$.

L'ipotesi nulla e l'ipotesi alternativa sono

$$H_0: \quad \sigma = 8$$
$$H_0: \quad \sigma < 8\,.$$

Il valore della statistica test χ^2 è

$$\chi^2 = \frac{14 \cdot 5^2}{8^2} \cong 5.47$$

Il test è a una coda e la regione di rifiuto è $\chi^2 < \chi^2_\alpha$; al livello di significatività $\alpha = 0.05$ e per il grado di libertà $\nu = 14$, sulle tavole della distribuzione χ^2 si trova

$$\chi^2_\alpha = \chi^2_{0.95} = 6.575\,.$$

Il valore $\chi^2 = 5.47$ appartiene alla regione di rifiuto, perciò l'ipotesi nulla viene rifiutata, concludendo che la diminuzione della variabilità della temperatura è significativa al livello del 5% .

Esempio 38 continua...

L'ipotesi nulla e l'ipotesi alternativa sono

$$H_0: \quad \sigma = 8$$
$$H_0: \quad \sigma < 8\,.$$

Esempio 38
Lo scarto quadratico medio delle temperature annuali di una città in un periodo di 100 anni è stato di 8°C. Misurando la temperatura media del quindicesimo giorno di ogni mese durante gli ultimi 15 anni si è riscontrato che lo scarto quadratico medio delle temperature annuali è stato di 5°C. Sottoporre a test l'ipotesi che la temperatura della città sia diventata meno variabile che in passato, usando i livelli di significatività $\alpha = 0.05$ e $\alpha = 0.01$.

Al livello di significatività $\alpha = 0.01$ e per il grado di libertà $\nu = 14$, sulle tavole si trova

$$\chi^2_\alpha = \chi^2_{0.99} = 4.660\,.$$

Il valore $\chi^2 = 5.47$ appartiene in questo caso alla regione di accettazione, perciò l'ipotesi nulla viene accettata, concludendo che la variabilità della temperatura non è cambiata e il risultato è dovuto al caso.

Questo test basato sull'uso della distribuzione χ^2 è valido sia per piccoli che per grandi campioni, purché provenienti da una popolazione normale; in pratica viene però usato solo per piccoli campioni.

Test di ipotesi sulla varianza e sullo scarto quadratico medio

Per grandi campioni provenienti da distribuzioni normali

Infatti, se il campione è grande e proviene da popolazione normale, si può usare la

$$Z = \frac{S - \sigma_0}{\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{2n}}}$$

L'ipotesi nulla è

H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$.

Test	Ipot. altern. H_1	Liv. signif. α	Valori critici	Reg. rifiuto
una coda	$\sigma^2 > \sigma_0^2$	0.01	2.326	$Z > 2.326$
		0.05	1.645	$Z > 1.645$
una coda	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	0.01	-2.326	$Z < -2.326$
		0.05	-1.645	$Z < -1.645$
due code	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	0.01	-2.576 e 2.576	$Z < -2.576$ $Z > 2.576$
		0.05	-1.96 e 1.96	$Z < -1.96$ $Z > 1.96$

Esempio 39

Si misura la temperatura di ebollizione di 100 campioni di un liquido e si trova una varianza campionaria $s^2 = 0.0098\,°\mathrm{C}$.

Si può affermare al livello di significatività $\alpha = 0.01$ che la varianza della distribuzione della popolazione da cui proviene il campione sia minore di 0.015?

Supporre che la popolazione abbia distribuzione almeno approssimativamente normale.

L'ipotesi nulla e l'ipotesi alternativa sono

$$H_0: \qquad \sigma^2 \geq 0.015$$

$$H_0: \qquad \sigma^2 < 0.015\,.$$

Si ha

$$n = 100 \qquad s^2 = 0.0098 \qquad s = 0.099$$

$$\sigma_0^2 = 0.015 \qquad \sigma_0 = 0.1225$$

$$Z = \frac{0.099 - 0.1225}{\dfrac{0.1225}{\sqrt{200}}} = -2.71$$

Per il livello di significatività $\alpha = 0.01$ il valore critico è $z_\alpha = -2.326$ e la regione di rifiuto è data dai valori $Z < -2.326$; il valore $Z = -2.71$ appartiene alla regione di rifiuto, perciò possiamo rifiutare l'ipotesi nulla; dobbiamo perciò concludere che, al livello di significatività $\alpha = 0.01$ la varianza della popolazione è minore di 0.015.

Test di ipotesi sul rapporto di due varianze

Spesso si pone il problema di verificare se due popolazioni indipendenti hanno la stessa varianza.
Il confronto fra le varianze di due popolazioni può avere un significato a se stante: si pensi ad esempio all'esigenza di fare un confronto sull'accuratezza di un processo di produzione quando si usano due macchine diverse.

Il test per verificare l'ipotesi nulla

$$H_0: \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

si basa sul rapporto fra le due varianze campionarie.

Considerando due popolazioni aventi distribuzione normale, si estraggano da esse due campioni indipendenti di ampiezza rispettivamente n_1 e n_2. Le varianze dei due campioni siano s_1^2 e s_2^2, e si indichi con s_1^2 la più grande delle due varianze campionarie.

Se queste ipotesi sono verificate, in base al teorema 5, Cap. 6, si può affermare che la statistica

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

ha la distribuzione F con gradi di libertà $\nu_1 = n_1 - 1$ e $\nu_2 = n_2 - 1$.

Livelli di significatività e Valori critici

I valori critici che delimitano la regione di rifiuto dipendono dal grado di libertà ν e sono rispettivamente $F_\alpha(\nu_1,\nu_2)$ o $F_{1-\alpha}(\nu_1,\nu_2)$ per i due tipi di test a una coda, $F_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)$ e $F_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_1,\nu_2)$ per il test a due code.

$$F_{1-\alpha}(\nu_1,\nu_2)=\frac{1}{F_\alpha(\nu_2,\nu_1)}$$

$$H_0: \quad \sigma_1^2=\sigma_2^2$$

Test	Ipot. altern. H_1	Liv. signif. α	Valori critici	Reg. rifiuto
una coda	$\sigma_1^2>\sigma_2^2$	0.01	$F_\alpha=F_{0.01}$	$F>F_{0.01}$
		0.05	$F_\alpha=F_{0.05}$	$F>F_{0.05}$
una coda	$\sigma_1^2<\sigma_2^2$	0.01	$F_{1-\alpha}=F_{0.99}$	$F<F_{0.99}$
		0.05	$F_{1-\alpha}=F_{0.95}$	$F<F_{0.95}$
due code	$\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$	0.01	$F_{1-\frac{\alpha}{2}}=F_{0.995}$ $F_{\frac{\alpha}{2}}=F_{0.005}$	$F<F_{0.995}$ $F>F_{0.005}$
		0.05	$F_{1-\frac{\alpha}{2}}=F_{0.975}$ $F_{\frac{\alpha}{2}}=F_{0.025}$	$F<F_{0.975}$ $F>F_{0.025}$

Esempio 40

Da due popolazioni aventi distribuzione normale vengono estratti due campioni indipendenti aventi le seguenti caratteristiche

$$n_1 = 16 \qquad s_1^2 = 47.3$$

$$n_2 = 13 \qquad s_1^2 = 36.4$$

Sottoporre a test l'ipotesi nulla

$$\text{H}_0: \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

scegliendo come ipotesi alternativa

a – $\quad \text{H}_1: \quad \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

b – $\quad \text{H}_1: \quad \sigma_1^2 < \sigma_2^2$

c – $\quad \text{H}_1: \quad \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

Usare i livelli di significatività $\alpha = 0.05$ e $\alpha = 0.01$.

Usare i livelli di significatività $\alpha = 0.05$ e $\alpha = 0.01$.

I gradi di libertà della distribuzione F sono

$$\nu_1 = n_1 - 1 = 15 \qquad \nu_2 = n_2 - 1 = 12$$

Livello di significatività $\alpha = 0.05$

Esempio 40 continua...

Esempio 40

Da due popolazioni aventi distribuzione normale vengono estratti due campioni indipendenti aventi le seguenti caratteristiche

$$n_1 = 16 \qquad s_1^2 = 47.3$$

$$n_2 = 13 \qquad s_1^2 = 36.4$$

a – H$_1$: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Il valore critico per il test è

$$F_\alpha(\nu_1, \nu_2) = F_{0.05}(15{,}12) = 2.62$$

Il valore della statistica F è

$$F = \frac{47.3}{36.4} = 1.30$$

La regione di rifiuto è costituita dai valori $F > 2.62$, perciò l'ipotesi nulla non deve essere rifiutata e si può concludere che i dati non rivelano l'esistenza di una differenza significativa fra le varianze delle due popolazioni.

b – H$_1$: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$

Il valore critico per il test è

$$F_{1-\alpha}(\nu_1, \nu_2) = F_{0.95}(15{,}12) = \frac{1}{F_{0.05}(12{,}15)} = \frac{1}{2.48} = 0.403$$

La regione di rifiuto è costituita dai valori $F < 0.403$, perciò l'ipotesi nulla non deve essere rifiutata.

Esempio 40 continua…

Esempio 40
Da due popolazioni aventi distribuzione normale vengono estratti due campioni indipendenti aventi le seguenti caratteristiche

$$n_1 = 16 \qquad s_1^2 = 47.3$$
$$n_2 = 13 \qquad s_1^2 = 36.4$$

c – H$_1$: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

I valori critici per il test sono

$$F_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1, \nu_2) = F_{0.025}(15{,}12) = 3.18$$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_1, \nu_2) = F_{0.975}(15{,}12) = \frac{1}{F_{0.025}(12{,}15)} = \frac{1}{2.96} = 0.34$$

La regione di rifiuto è costituita dai valori $F < 0.34$ e dai valori $F > 3.18$, perciò l'ipotesi nulla non deve essere rifiutata.

Fare da soli il livello di significatività dello 0.01!!

Esempio 41

Nella tabella 10 sono riportate le lunghezze in cm di due campioni A e B di oggetti dello stesso tipo prodotti da due macchine diverse.

A	8.26	8.13	8.35	8.07	8.34		
B	7.95	7.89	7.90	8.14	7.92	7.84	7.94

Tabella 10

Per questi dati è stato calcolato un intervallo di confidenza per la differenza fra le medie, assumendo che le due popolazioni da cui provengono i campioni abbiano distribuzione normale con la stessa varianza (esempio 19, §7.7, pag. 201).

Sottoporre a test questa assunzione con livello di significatività $\alpha = 0.05$.

Per verificare se è ragionevole assumere che le varianze delle due popolazioni sono uguali, scegliamo come ipotesi nulla e come ipotesi alternativa

$$H_0: \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1: \quad \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{ll} n_1 = 5 & s_1^2 = 0.01575 \\ n_2 = 7 & s_2^2 = 0.00910 \end{array}}$$

Il valore della statistica F è

$$F = \frac{0.01575}{0.00910} = 1.73$$

Esempio 41 continua...

Per verificare se è ragionevole assumere che le varianze delle due popolazioni sono uguali, scegliamo come ipotesi nulla e come ipotesi alternativa

$$H_0: \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1: \quad \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$n_1 = 5 \qquad s_1^2 = 0.01575$

$n_2 = 7 \qquad s_2^2 = 0.00910$

Il valore della statistica F è

$$F = \frac{0.01575}{0.00910} = 1.73$$

Fare da soli gli esempi 42, 43, 44 (I parte)!!

Si effettua un test a due code e i valori critici per il test sono

$$F_{\frac{\alpha}{2}}(\nu_1, \nu_2) = F_{0.025}(4,6) = 6.23$$

$$F_{1-\frac{\alpha}{2}}(\nu_1, \nu_2) = F_{0.975}(4,6) = \frac{1}{F_{0.025}(6,4)} = \frac{1}{9.20} = 0.11$$

La regione di rifiuto è costituita dai valori $F < 0.11$ e dai valori $F > 6.23$, perciò l'ipotesi nulla non deve essere rifiutata: non c'è una ragione significativa per dubitare che le due varianze siano uguali.