Facoltà di Ingegneria
Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Statistica e Probabilità per l'Ingegneria

- Variabili aleatorie - (2^ parte)

2. Distribuzioni di Probabilità discrete

Ing. Andrea Zanobini
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Distribuzione di Bernoulli (1654-1705)

Una sequenza di **prove bernoulliane** costituisce un **processo di Bernoulli** sotto le seguenti ipotesi:
1 – ci sono solo due possibili risultati mutuamente esclusivi per ogni prova, chiamati arbitrariamente "successo" e "insuccesso";
2 – la probabilità di successo p è la stessa per ogni prova;
3 – tutte le prove sono indipendenti; l'indipendenza significa che il risultato di una prova non è influenzato dal risultato di qualunque altra prova; ad esempio, l'evento "alla terza prova si ha successo" è indipendente dall'evento "alla prima prova si ha successo".

Esempio 1

Il lancio di una moneta è una prova bernoulliana: si può considerare successo l'evento "esce testa" e insuccesso l'evento "esce croce". In questo caso la probabilità di successo vale $p = \frac{1}{2}$.

Nel lancio di due dadi si può considerare successo ad esempio l'evento "la somma dei punti è 7" e insuccesso l'evento complementare: in questo caso si tratta di una prova bernoulliana e la probabilità di successo è $p = \frac{1}{6}$.

Distribuzione Binomiale

Teorema 1

La probabilità che in n prove la variabile aleatoria X assuma il valore x, ossia che il successo si verifichi x volte in n prove, è data dalla **distribuzione di probabilità binomiale o di Bernoulli**

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad \text{per } x = 0,1,2,\dots,n \tag{4.1}$$

La **funzione di distribuzione binomiale** è data da

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{4.2}$$

Sia p la probabilità di successo in una prova bernoulliana.

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

Proprietà 1

Se X è una variabile aleatoria avente distribuzione binomiale con parametri n e p, allora il **valor medio** è

$$\mu = np \tag{4.3}$$

e la **varianza** è

$$\sigma^2 = np(1-p) \tag{4.4}$$

Esempio 2

Calcolare la probabilità di ottenere 2 volte testa, effettuando 6 lanci di una moneta.

numero prove	$n = 6$
numero successi	$x = 2$
probabilità di successo	$p = \frac{1}{2}$

$$P(X = 2) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{6!}{2!4!}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16} = \frac{15}{64} \cong 0.2344$$

Esempio 3

Si effettuano 20 lanci di un dado; il successo sia di ottenere 3. Calcolare la probabilità di ottenere 2 volte il caso di successo.

$$n = 20 \qquad x = 2 \qquad p = \frac{1}{6}$$

$$P(X = 2) = \binom{20}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1 - \frac{1}{6}\right)^{20-2} = \binom{20}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{18} \cong 0.1982$$

Fare da soli gli esempi 4 e 5 !!

Esempio 6

Calcolare la probabilità che effettuando 6 lanci di due dadi si ottenga la somma 9

a – 2 volte;

b – almeno 2 volte.

Il successo sia di ottenere come somma 9; calcoliamo la probabilità di successo. Servendosi del grafico riprodotto nella figura 9, pag. 97, si deduce facilmente che i casi possibili sono 36 e i casi favorevoli sono 4; questi ultimi sono dati dalle coppie

$$(3, 6) \quad (4, 5) \quad (5, 4) \quad (6, 3).$$

Pertanto la probabilità di successo è

$$p = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

a – $n = 6 \qquad x = 2 \qquad p = \frac{1}{9}$

$$P(X = 2) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{9}\right)^2\left(\frac{8}{9}\right)^4 = 0.1156$$

b –

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \left[P(X = 0) + P(X = 1)\right] =$$

$$= 1 - \left[\binom{6}{0}\left(\frac{1}{9}\right)^0\left(\frac{8}{9}\right)^6 + \binom{6}{1}\left(\frac{1}{9}\right)^1\left(\frac{8}{9}\right)^5\right] = 1 - (0.4933 + 0.3700) = 0.1367$$

Esempio 7

La probabilità di laurearsi di uno studente che si iscrive all'Università è $p = 0.4$. Calcolare la probabilità che su 5 studenti

a – nessuno si laurei;

b – uno si laurei;

c – almeno uno si laurei;

d – tutti si laureino.

Il successo è che lo studente si laurei; la variabile aleatoria X indica il numero di laureati.

a – $n = 5$ $x = 0$ $p = 0.4$

$$P(X=0) = \binom{5}{0}(0.4)^0(0.6)^5 = 0.07776$$

b – $$P(X=1) = \binom{5}{1}(0.4)^1(0.6)^4 = 0.2592$$

c – $$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.07776 = 0.9222$$

d – $$P(X=5) = \binom{5}{5}(0.4)^5(0.6)^0 = 0.01024$$

Fare da soli gli esempi 8 e 9 !!

Esempio 10

La probabilità che un apparecchio subisca un certo tipo di guasto è $p = 0.05$; calcolare la probabilità che su 16 di tali apparecchi

a – al più 2 si guastino;

b – almeno 2 si guastino;

c – almeno 4 si guastino.

La variabile aleatoria X indica il numero dei guasti.

$$n = 16 \qquad p = 0.05 \qquad 1-p = 0.95$$

$$P(X \le 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$P(X=0) = \binom{16}{0}(0.05)^0(0.95)^{16} = 0.4401$$

$$P(X=1) = \binom{16}{1}(0.05)^1(0.95)^{15} = 0.3706$$

$$P(X=2) = \binom{16}{2}(0.05)^2(0.95)^{14} = 0.1463$$

$$P(X \le 2) = 0.4401 + 0.3706 + 0.1463 = 0.9570$$

$$P(X \ge 2) = 1 - P(X<2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1)] = \\ = 1 - 0.4401 - 0.3706 = 0.1893$$

$$P(X \ge 4) = 1 - P(X<4)$$

$$P(X<4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)$$

$$P(X=3) = \binom{16}{3}(0.05)^3(0.95)^{13} = 0.0359$$

$$P(X \ge 4) = 1 - (0.4401 + 0.3706 + 0.1463 + 0.0359) = 0.0071$$

Fare da soli gli esempi 11, 12 e 13 !!

Esempio 14

Se il 5% dei chip di memoria prodotti da una macchina sono difettosi, determinare la probabilità che su 4 chip scelti a caso

a – 1 sia difettoso;

b – nessuno sia difettoso;

c – meno di 2 siano difettosi.

Calcolare la media e la deviazione standard del numero di chip difettosi su un totale di 400 chip.

La variabile aleatoria X indica il numero di chip difettosi.

$$n = 4 \qquad p = 0.05$$

a – $$P(X=1) = \binom{4}{1}(0.05)^1(0.95)^3 = 0.1715$$

b – $$P(X=0) = \binom{4}{0}(0.05)^0(0.95)^4 = 0.8145$$

c – $$P(X<2) = P(X=0) + P(X=1) = 0.1715 + 0.8145 = 0.9860$$

d – $$n = 400 \qquad p = 0.05$$

$$\mu = np = 400 \cdot 0.05 = 20$$

$$\sigma^2 = np(1-p) = 400 \cdot 0.05 \cdot 0.95 = 19$$

$$\sigma = \sqrt{19} \cong 4.36$$

Esempio 15

Data una distribuzione binomiale con $n = 9$ e $\sigma = 0.9$, ricavare i possibili valori di p; per ciascun valore di p calcolare $P(X = 4)$.

Per la proprietà 1, si ha

$$\sigma^2 = np(1-p) = 0.81 = \frac{81}{100}$$

$$9p(1-p) = \frac{81}{100}$$

$$100p^2 - 100p + 9 = 0$$

I possibili valori di p sono

$$p = 0.1 \qquad p = 0.9 .$$

Per $n = 9$ e $p = 0.1$ si ha

$$P(X = 4) = \binom{9}{4}(0.1)^4(0.9)^5 = 0.007440$$

Per $n = 9$ e $p = 0.9$ si ha

$$P(X = 4) = \binom{9}{4}(0.9)^4(0.1)^5 = 0.0008267$$

Fare da soli l'esempio 16 !!

Distribuzione Binomiale

Uso delle tavole ➔ MINITAB !!

Relazione per ricorrenza ➔ MINITAB !!

Rappresentazione grafica ➔ MINITAB !!

Fare con MINITAB (www.minitab.com) gli esempi 17, 18, 19, 20, 21, 22 !!

Distribuzione di Poisson (1781-1840)

Vi sono fenomeni in cui determinati eventi, con riferimento a un certo intervallo di tempo o di spazio, accadono raramente: il numero di eventi che si verificano in quell'intervallo varia da 0 a n, e n non è determinabile a priori. Ad esempio, il numero di automobili che transitano in una strada poco frequentata in un intervallo di tempo di 5 minuti scelto a caso, può essere considerato un evento raro; analogamente sono eventi rari il numero di infortuni sul lavoro che accadono in una azienda in una settimana o il numero di errori di stampa presenti in una pagina di un libro.

Nello studio degli eventi rari, come quelli degli esempi citati, è fondamentale il riferimento a uno specifico intervallo di tempo o di spazio.

Le seguenti condizioni descrivono il così detto **processo di Poisson**:

1 – le realizzazioni degli eventi sono indipendenti: il verificarsi di un evento in un intervallo di tempo o di spazio non ha alcun effetto sulla probabilità di verificarsi dell'evento una seconda volta nello stesso, o in un altro, intervallo;

2 – la probabilità di una singola realizzazione dell'evento in un dato intervallo è proporzionale alla lunghezza dell'intervallo;

3 – in ogni parte arbitrariamente piccola dell'intervallo, la probabilità che l'evento si verifichi più di una volta è trascurabile.

Teorema 2
La probabilità che la variabile aleatoria X assuma il valore x è data dalla **distribuzione di probabilità di Poisson**

$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad \text{per } x = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.10}$$

dove il parametro $\lambda > 0$ indica il numero medio di realizzazioni dell'evento nell'intervallo assegnato.

funzione di distribuzione di Poisson è data da

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{k=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Proprietà 4
Il **valor medio** e la **varianza** della distribuzione di Poisson di parametro λ sono dati da

$$\mu = \lambda \qquad \sigma^2 = \lambda \tag{4.11}$$

Una importante differenza tra la distribuzione di Poisson e la binomiale riguarda i numeri di prove e di successi: per una distribuzione binomiale il numero n di prove è finito e il numero x di successi non può superare n; per una distribuzione di Poisson il numero di prove è essenzialmente infinito e il numero di successi può essere infinitamente grande, anche se la probabilità di avere x successi diventa molto piccola al crescere di x.

La distribuzione di Poisson ha molte applicazioni in vari ambiti diversi, perché può essere usata per approssimare una distribuzione binomiale di parametri n e p, quando il numero di prove n è grande e la probabilità di successo p è piccola, ossia si tratta di un evento raro.

Per dimostrare questo, indichiamo con X una variabile aleatoria avente distribuzione binomiale con parametri n e p, con n grande e p piccola, e sia $\lambda = np$; si ha

$$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x} =$$

$$= \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{x!\,n^x} \lambda^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} =$$

$$= \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)}{x!} \lambda^x \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

Per $n \to \infty$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} = e^{-\lambda}$$

quindi

$$\lim_{n\to\infty} b(x;n,p) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Esempio 23

Dalle statistiche degli ultimi 5 anni, un'azienda ha calcolato che ogni giorno sono assenti in media 1.8 operai. Calcolare la probabilità che in un giorno qualsiasi ci siano 3 operai assenti contemporaneamente.

Il numero medio di assenti giornalieri è piccolo, perciò si può usare la distribuzione di Poisson con parametro $\lambda = 1.8$; si trova

$$P(X=3) = \frac{e^{-1.8}(1.8)^3}{3\,!} = 0.1607$$

Esempio 24

Ad un servizio di guardia medica arrivano in media 3.5 richieste ogni ora di interventi urgenti a domicilio.

a – Calcolare la probabilità che in una stessa ora arrivino 3, 4, 5 chiamate urgenti.

b – Calcolare la probabilità che in una stessa ora arrivi un numero di chiamate compreso fra 3 e 5.

c – Calcolare la probabilità che in una stessa ora arrivi un numero di chiamate maggiore di 4.

a – Le probabilità possono essere calcolate con la distribuzione di Poisson, con parametro $\lambda = 3.5$; si ha

$$P(X=3) = \frac{e^{-3.5}(3.5)^3}{3\,!} = 0.2158$$

$$P(X=4) = \frac{e^{-3.5}(3.5)^4}{4\,!} = 0.1888$$

$$P(X=5) = \frac{e^{-3.5}(3.5)^5}{5\,!} = 0.1322$$

b –
$$P(3 \le X \le 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) =$$
$$= 0.2158 + 0.1888 + 0.1322 = 0.5368$$

c –
$$P(X > 3) = 1 - P(X \le 3) = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)\right] =$$
$$= 1 - \left(e^{-3.5} + e^{-3.5} \cdot 3.5 + \frac{e^{-3.5}(3.5)^2}{2} + \frac{e^{-3.5}(3.5)^3}{3!} \right) =$$
$$= 1 - (0.03020 + 0.1057 + 0.1850 + 0.2158) = 0.4633$$

Esempio 25

Un libro di 500 pagine contiene 50 errori di stampa. Qual è la probabilità di trovare almeno 3 errori su una pagina aperta a caso?

Il numero medio di errori su una pagina è $\lambda = \frac{50}{500} = 0.1$; con la distribuzione di Poisson si ha
$$P(X \ge 3) = 1 - P(X \le 2) = 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\right] =$$
$$= 1 - \left(e^{-0.1} + 0.1 \cdot e^{-0.1} + \frac{0.1^2}{2} e^{-0.1} \right) = 1 - 0.99985 = 0.00015$$

Distribuzione di Poisson

Uso delle tavole → MINITAB !!

Relazione per ricorrenza → MINITAB !!

Rappresentazione grafica → MINITAB !!

Fare con MINITAB (www.minitab.com) gli esempi 26, 27, 28, 29 !!

Approssimazione della distribuzione binomiale con la distribuzione di Poisson

Una **regola pratica** accettabile è di usare questa approssimazione se $n \geq 50$ e $p \leq 0.1$. La regola comunque non è rigida: si può dire che più è piccola la probabilità p, migliore è l'approssimazione, e analogamente più è grande n, migliore è l'approssimazione (vedere esempio 33).

Esempio 30

Se il 3% delle lampadine costruite da una fabbrica sono difettose, trovare la probabilità che in un campione di 100 lampadine 2 siano difettose usando

a – la distribuzione binomiale;

b – la distribuzione di Poisson.

a – Sostituendo $n = 100$, $x = 2$ e $p = 0.03$ nella formula della distribuzione binomiale si ottiene

$$P(X=2) = \binom{100}{2}(0.03)^2(0.97)^{98} = 0.22515$$

b – Sostituendo $x = 2$ e $\lambda = np = 100 \cdot 0.03 = 3$ nella formula della distribuzione di Poisson, si ottiene

$$P(X=2) = \frac{e^{-3} \cdot 3^2}{2!} = 0.22404$$

Esempio 31

Se la probabilità che una persona sia allergica a un dato farmaco è $p = 0.001$, determinare le probabilità che su 2000 persone

a – meno di 2 siano allergiche;

a – 3 siano allergiche;

b – più di 2 siano allergiche.

La variabile X = numero delle persone allergiche è una variabile aleatoria con distribuzione binomiale, ma, poiché un caso di allergia è un evento raro, si può supporre che X segua la distribuzione di Poisson.

Si ha

a – $n = 2000 \qquad p = 0.001 \qquad \lambda = np = 2000 \cdot 0.001 = 2$

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = e^{-2} + \frac{e^{-2}\,2^1}{1!} = 3e^{-2} = 0.4060$$

b – $$P(X = 3) = \frac{e^{-2}\,2^3}{3!} = 0.1804$$

c – $$P(X > 2) = 1 - P(X \le 2) = 1 - \left[P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)\right] =$$

$$= 1 - \left(e^{-2} + \frac{e^{-2}\,2^1}{1!} + \frac{e^{-2}\,2^2}{2!}\right) = 1 - 5e^{-2} = 0.3233$$

Il calcolo della probabilità con la distribuzione binomiale è molto più laborioso; infatti con la distribuzione binomiale al punto c si dovrebbe calcolare la quantità seguente

c – $$P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right]=$$

$$=1-\left[\binom{2000}{0}(0.001)^0(0.999)^{2000}+\binom{2000}{1}(0.001)^1(0.999)^{1999}+\right.$$

Esempio 32

Un allevatore di galline per la produzione di uova ha acquistato 900 pulcini. Il venditore dichiara che, essendo stati selezionati accuratamente, solo un pulcino su 150 potrà risultare un maschio. Calcolare la probabilità che l'allevatore, quando i pulcini saranno adulti, si ritrovi

a – 7 galli e 893 galline;

b – meno di 4 galli;

c – più di 4 galli;

d – tutte galline.

Con le tavole della distribuzione di Poisson si trova

a – $n=900 \qquad p(\text{maschio})=\dfrac{1}{150} \qquad \lambda=np=\dfrac{900}{150}=6$

$$P(X=7)=P(X\le 7)-P(X\le 6)=0.7440-0.6063=0.1377$$

b – $P(X<4)=P(X\le 3)=0.1512$

c – $P(X>4)=1-P(X\le 4)=1-0.2851=0.7149$

d – $P(X=0)=e^{-6}=0.0025$

Fare da soli l'esempio 34 !!