

## Mutuo accoppiamento fra linee e accoppiatore direzionale

Carlo Carobbi, Ottobre 2018

Si considera il caso di mutuo accoppiamento fra linee parallele, immerse in un dielettrico omogeneo e prive di perdite. La velocità di propagazione delle onde sulle linee è  $v$ . Le linee hanno lunghezza  $\mathcal{L}$ . I parametri per unità di lunghezza delle linee sono l'autoinduttanza  $l_G$  e  $l_R$ , la mutua induttanza  $l_m$ , la capacità  $c_G$  e  $c_R$ , la mutua capacità  $c_m$ . Si pone:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_G & l_m \\ l_m & l_R \end{bmatrix} \quad (1)$$

e

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_G + c_m & -c_m \\ -c_m & c_R + c_m \end{bmatrix}. \quad (2)$$

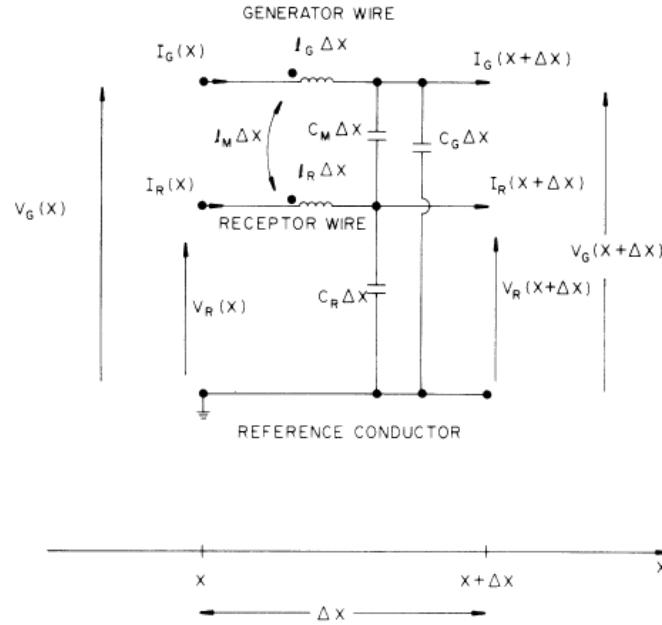


Fig. 3. The per-unit-length model.

I parametri per unità di lunghezza  $l_G$  ed  $l_m$  (vedi la figura qui sopra) sono così definiti

$$j\omega l_G \Delta x = \left. \frac{V_G(x)}{I_G(x)} \right|_{I_R(x)=0}, \quad j\omega l_m \Delta x = \left. \frac{V_R(x)}{I_G(x)} \right|_{I_R(x)=0}, \quad (3)$$

dove le linee G ed R sono in cortocircuito col conduttore di riferimento alla sezione  $x + \Delta x$  e la linea R è aperta alla sezione  $x$ . Il parametro  $l_R$  è definito come il parametro  $l_G$  ma scambiando G con R. Inoltre

$$j\omega(c_G + c_m)\Delta x = \left. \frac{I_G(x)}{V_G(x)} \right|_{V_R(x)=0}, \quad -j\omega c_m \Delta x = \left. \frac{I_R(x)}{V_G(x)} \right|_{V_R(x)=0}, \quad (4)$$

dove le linee G ed R sono in circuito aperto alla sezione  $x + \Delta x$  e la linea R è cortocircuitata col conduttore di riferimento alla sezione  $x$ . Il parametro  $c_R$  è definito come il parametro  $c_G$  ma scambiando G con R.

Le matrici  $\mathbf{L}$  e  $\mathbf{C}$  sono legate fra loro e si ha

$$\mathbf{LC} = \begin{bmatrix} 1/v^2 & 0 \\ 0 & 1/v^2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

Sostituendo la (1) e la (2) nella (5) e nell'ipotesi  $l_R = l_G = l$  e  $c_R = c_G = c$  (linee identiche) si ottiene

$$\begin{cases} l(c + c_m) - l_m c_m = \frac{1}{v^2} \\ -lc_m + l_m(c + c_m) = 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Notare che se si conosce la velocità di propagazione  $v$  allora la matrice  $\mathbf{C}$  si può ricavare dalla matrice  $\mathbf{L}$  o viceversa (vedi la (5)).

Dalle (6) si ottiene

$$\begin{cases} v = \frac{1}{\sqrt{1+k}} \frac{1}{\sqrt{lc}} \\ \frac{l_m}{l} = \frac{c_m}{c + c_m} \end{cases}. \quad (7)$$

La lunghezza d'onda è  $\lambda = v/f$ , dove  $f$  è la frequenza, ed il numero d'onda è  $\beta = 2\pi/\lambda$ . Si definisce poi il fattore di mutuo accoppiamento  $k$  che è dato da

$$k = \frac{l_m}{l} = \frac{c_m}{c + c_m}. \quad (8)$$

Assumiamo che una delle due linee sia alimentata da un generatore di tensione (linea G) e l'altra no (linea R). La resistenza interna del generatore che alimenta la linea G e le resistenze che chiudono le rimanenti tre porte (la porta non alimentata della linea G e le due porte della linea R) siano pari a  $Z_0$ , dove

$$Z_0 = \sqrt{\frac{l}{c + c_m}} = vl\sqrt{1 - k^2}. \quad (9)$$

$Z_0$  rappresenta l'impedenza caratteristica di ciascuna linea in presenza dell'altra.

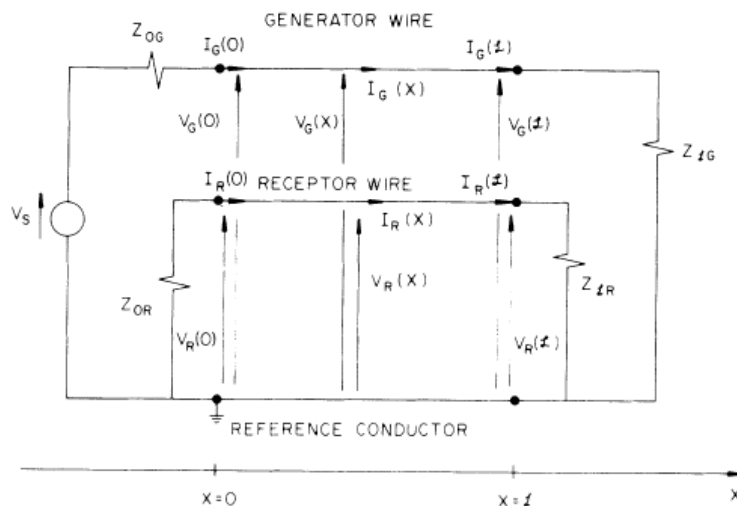


Fig. 1. The three-conductor transmission line.

Si ottengono le seguenti equazioni delle linee accoppiate:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\mathbf{V}(x) &= -\mathbf{Z}\mathbf{I}(x) \\ \frac{d}{dx}\mathbf{I}(x) &= -\mathbf{Y}\mathbf{V}(x)\end{aligned}\quad (10)$$

dove  $\mathbf{Z} = j\omega\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{Y} = j\omega\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{V}(x) = [V_G(x), V_R(x)]^T$  e  $\mathbf{I}(x) = [I_G(x), I_R(x)]^T$ . Risolvendo le equazioni delle linee accoppiate per determinare le tensioni alle porte della linea R si trova:

$$V_R(0) = \frac{V_S}{4} \left[ \frac{j\omega l_m \mathcal{L}}{Z_0} + j\omega c_m \mathcal{L} Z_0 \right] \frac{\sin(\beta \mathcal{L})}{\beta \mathcal{L}} \frac{1}{\left[ \cos(\beta \mathcal{L}) + j \frac{\sin(\beta \mathcal{L})}{\sqrt{1-k^2}} \right]} \quad (11)$$

e

$$V_R(\mathcal{L}) = \frac{V_S}{4} \left[ -\frac{j\omega l_m \mathcal{L}}{Z_0} + j\omega c_m \mathcal{L} Z_0 \right] \frac{\sin(\beta \mathcal{L})}{\beta \mathcal{L}} \frac{1}{\left[ \cos(\beta \mathcal{L}) + j \frac{\sin(\beta \mathcal{L})}{\sqrt{1-k^2}} \right]^2}, \quad (12)$$

dove  $V_S$  è la tensione di circuito aperto impressa dal generatore. Dalla seconda delle (7) e dalla (9) abbiamo

$$\frac{l_m}{c_m} = Z_0^2. \quad (13)$$

Se si sostituisce quindi la (13) nella (12) abbiamo  $V_R(\mathcal{L}) = 0$ , mentre sostituendo la (13) nella (11) si trova

$$V_R(0) = j \frac{V_S}{2} \sin(\beta \mathcal{L}) \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \frac{1}{\left[ \cos(\beta \mathcal{L}) + j \frac{\sin(\beta \mathcal{L})}{\sqrt{1-k^2}} \right]}. \quad (14)$$

Si ha poi che

$$V_G(0) = \frac{V_S}{2} \quad (15)$$

e

$$V_G(\mathcal{L}) = \frac{V_S}{2} \frac{1}{\left[ \cos(\beta \mathcal{L}) + j \frac{\sin(\beta \mathcal{L})}{\sqrt{1-k^2}} \right]}. \quad (16)$$

Ha interesse la descrizione del quadripolo in termini di parametri  $S$ . Numeriamo le porte in questo modo: Porta 1 – linea G in  $x = 0$ , Porta 2 – linea G in  $x = \mathcal{L}$ , Porta 3 – linea R in  $x = 0$ , Porta 4 – linea R in  $x = \mathcal{L}$ . Allora la matrice  $\mathbf{S}$  è la seguente (si tenga conto che il quadripolo è simmetrico e reciproco)

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & S_{21} & S_{31} & 0 \\ S_{21} & 0 & 0 & S_{31} \\ S_{31} & 0 & 0 & S_{21} \\ 0 & S_{31} & S_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

dove

$$S_{21} = \frac{1}{\left[ \cos(\beta \mathcal{L}) + j \frac{\sin(\beta \mathcal{L})}{\sqrt{1-k^2}} \right]} \quad (18)$$

e

$$S_{31} = j \sin(\beta \mathcal{L}) \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \frac{1}{\left[ \cos(\beta \mathcal{L}) + j \frac{\sin(\beta \mathcal{L})}{\sqrt{1-k^2}} \right]} \quad (19)$$

Si noti che è verificata la condizione  $|S_{21}|^2 + |S_{31}|^2 = 1$  (quadripolo privo di perdite, quindi matrice  $\mathbf{S}$  unitaria, cioè il prodotto di  $\mathbf{S}$  per la sua trasposta coniugata è la matrice identità), dove:

$$|S_{21}|^2 = \frac{1-k^2}{1-k^2 \cos^2(\beta \mathcal{L})} \quad (20)$$

e

$$|S_{31}|^2 = \frac{\sin^2(\beta \mathcal{L})}{1-k^2 \cos^2(\beta \mathcal{L})} k^2. \quad (21)$$

Si osserva che se  $P_1$  è la potenza diretta applicata alla porta 1 allora, assumendo che le altre tre porte siano terminate sull'impedenza caratteristica, si ha

$$P_3 = |S_{31}|^2 P_1 \quad (22)$$

$$P_2 = |S_{21}|^2 P_1 \quad (23)$$

e

$$P_4 = 0. \quad (24)$$

Se poi chiudiamo la porta 2 su un carico che ha coefficiente di riflessione  $\Gamma$  (e le porte 3 e 4 chiuse sull'impedenza caratteristica) allora le potenze dirette  $P_3$  e  $P_2$  sono ancora date dalle (22) e (23) mentre

$$P_4 = |S_{31}|^2 |S_{21}|^2 |\Gamma|^2 P_1 = |S_{31}|^2 |\Gamma|^2 P_2. \quad (25)$$

Quindi

$$\frac{P_4}{P_3} = |S_{21}|^2 |\Gamma|^2. \quad (26)$$

In un accoppiatore direzionale a linea di trasmissione usualmente  $\mathcal{L} = \lambda/4$ , quindi

$$S_{21} = -j\sqrt{1-k^2} \quad (27)$$

e

$$S_{31} = k. \quad (28)$$

La porta 3 è detta porta “accoppiata” (o “forward”), la porta 4 è detta “isolata” (o “reverse”). Negli accoppiatori direzionali la porta accoppiata è terminata ma non accessibile. Negli accoppiatori bi-direzionali sia la porta accoppiata che la porta isolata sono accessibili. La matrice  $\mathbf{S}$  di un accoppiatore direzionale sarà allora

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & S_{21} & 0 \\ S_{21} & 0 & S_{42} \\ 0 & S_{42} & 0 \end{pmatrix} \quad (29)$$

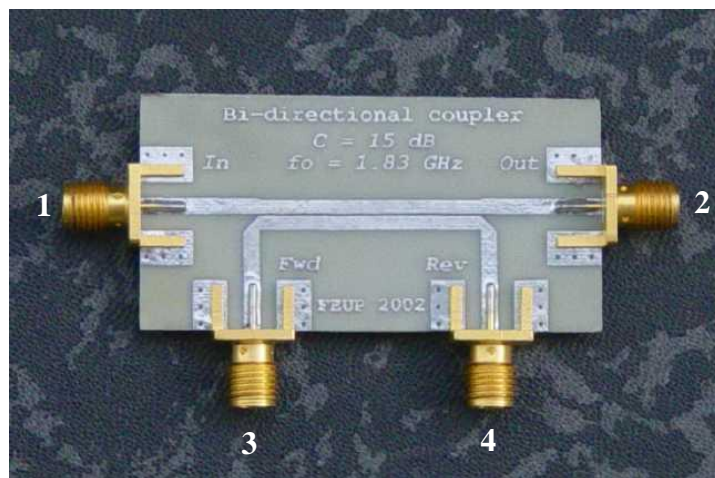
Per un accoppiatore bi-direzionale si definiscono i seguenti parametri (porta 1 alimentata, porte 2, 3 e 4 chiuse sull'impedenza caratteristica):

$$\text{Accoppiamento} = 10 \log \frac{P_1}{P_3} = -20 \log |S_{31}|, \quad (30)$$

$$\text{Direttività} = 10 \log \frac{P_3}{P_4} = -20 \log \frac{|S_{41}|}{|S_{31}|}, \quad (31)$$

$$\text{Isolamento} = 10 \log \frac{P_1}{P_4} = -20 \log |S_{41}|, \quad (32)$$

$$\text{Perdita d'inserzione} = 10 \log \frac{P_1}{P_2} = -20 \log |S_{21}|. \quad (33)$$



In figura è mostrato un accoppiatore bi-direzionale a microstriscia.

Da notare che:

1. La direttività, come l'isolamento, non è infinita (la direttività vale 30-40 dB per un buon accoppiatore direzionale).
2. Accoppiamento, direttività e isolamento non sono indipendenti, ossia:  
 $\text{Isolamento} = \text{Direttività} + \text{Accoppiamento}$ .
3. La perdita d'inserzione è maggiore di  $-10 \log(1-k^2)$  per via delle inevitabili perdite nel metallo, nel dielettrico, per radiazione.
4. Per simmetria  $S_{41} = S_{32}$  per cui, dalla (31),

$$\text{Direttività} = -20 \log \frac{|S_{32}|}{|S_{31}|}. \quad (34)$$

Questa è la definizione operativa di direttività per un accoppiatore direzionale la cui porta isolata non è accessibile.

Per un accoppiatore direzionale reale di quello rappresentato dalla (17), cioè di cui si tiene conto della direttività e isolamento non infiniti e dei coefficienti di riflessione non nulli alle porte, abbiamo

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{31} & S_{41} \\ S_{21} & S_{22} & S_{41} & S_{31} \\ S_{31} & S_{41} & S_{33} & S_{43} \\ S_{41} & S_{31} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} \quad (35)$$

Quindi se, per esempio, chiudiamo le porte 3 e 4 sull'impedenza caratteristica ( $a_3 = a_4 = 0$ ) e la porta 2 su un carico con coefficiente di riflessione  $\Gamma$ , si ha:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= S_{11}a_1 + S_{21}a_2 \\
 b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \\
 b_3 &= S_{31}a_1 + S_{41}a_2 \\
 b_4 &= S_{41}a_1 + S_{31}a_2 \\
 a_2 &= \Gamma b_2
 \end{aligned} \tag{36}$$

da cui

$$\begin{aligned}
 \frac{b_1}{a_1} &= S_{11} + \frac{S_{21}^2 \Gamma}{1 - S_{22} \Gamma} \\
 \frac{b_2}{a_1} &= \frac{S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma} \\
 \frac{b_3}{a_1} &= S_{31} + \frac{S_{41} \Gamma S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma} \\
 \frac{b_4}{a_1} &= S_{41} + \frac{S_{31} \Gamma S_{21}}{1 - S_{22} \Gamma} \\
 \frac{a_2}{a_1} &= \frac{S_{21} \Gamma}{1 - S_{22} \Gamma}
 \end{aligned} \tag{37}$$

Posto allora

$$\begin{aligned}
 C &= S_{31} \text{ (Coupling)} \\
 D &= \frac{S_{31}}{S_{41}} \text{ (Directivity)} \\
 L &= \frac{1}{S_{21}} \text{ (Loss)} \\
 S_1 &= S_{11} \text{ (Mismatch @ port 1)}, S_2 = S_{22} \text{ (Mismatch @ port 2)}
 \end{aligned} \tag{38}$$

abbiamo

$$\begin{aligned}
 \frac{b_1}{a_1} &= S_1 + \frac{\Gamma/L^2}{1 - \Gamma S_2} \\
 \frac{b_2}{a_1} &= \frac{1/L}{1 - \Gamma S_2} \\
 \frac{b_3}{b_2} &= C \left[ \frac{\Gamma}{D} + L(1 - \Gamma S_2) \right] \\
 \frac{b_4}{b_2} &= C \left[ \Gamma + \frac{L}{D}(1 - \Gamma S_2) \right] \\
 \frac{a_2}{a_1} &= \frac{\Gamma/L}{1 - \Gamma S_2}
 \end{aligned} \tag{39}$$

Dalla analisi delle (39) è evidente il ruolo dei vari parametri (soprattutto direttività, adattamento alle porte e coefficiente di riflessione  $\Gamma$ ) nel determinare l'accuratezza dell'accoppiatore direzionale reale nella misura della potenza diretta e della potenza riflessa.

E' di interesse anche un'analisi approssimata che comunque tenga in conto di eventuali carichi non perfettamente adattati alle porte 3 e 4 (ad esempio due misuratori di potenza) oltre che di un carico non adattato alla porta 2. Immaginiamo allora di chiudere le porte 2, 3 e 4 su carichi con coefficienti di riflessione  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  e  $\Gamma_4$  rispettivamente. Si assuma che si possa trascurare la potenza che, riflessa alle porte 3 e 4, giunge alla porta 2. Allora in questa ipotesi

$$\begin{aligned} b_2 &\simeq S_{21}a_1 + S_{22}\Gamma_2 b_2 \\ b_3 &= S_{31}a_1 + S_{41}\Gamma_2 b_2 + S_{33}\Gamma_3 b_3 + S_{43}\Gamma_4 b_4 \\ b_4 &= S_{41}a_1 + S_{31}\Gamma_2 b_2 + S_{43}\Gamma_3 b_3 + S_{44}\Gamma_4 b_4 \end{aligned} \quad (40)$$

dove si è trascurato il termine  $S_{41}\Gamma_3 b_3 + S_{31}\Gamma_4 b_4$  nella prima delle (40). Quindi dalla prima delle (40) si ricava

$$a_1 \simeq \frac{(1 - S_{22}\Gamma_2)b_2}{S_{21}} \quad (41)$$

Sostituendo la (41) nelle seconda e terza delle (40) e dopo passaggi si ottiene

$$\begin{aligned} b_3(1 - S_{33}\Gamma_3) &\simeq \left[ S_{31} \frac{1 - S_{22}\Gamma_2}{S_{21}} + S_{41}\Gamma_2 \right] b_2 + S_{43}\Gamma_4 b_4 \\ b_4(1 - S_{44}\Gamma_4) &\simeq \left[ S_{41} \frac{1 - S_{22}\Gamma_2}{S_{21}} + S_{31}\Gamma_2 \right] b_2 + S_{43}\Gamma_3 b_3 \end{aligned} \quad (42)$$

Pensiamo adesso al significato dei vari parametri  $C$ ,  $D$  e  $L$  come espresso dalle prime tre delle (38) e per economia di notazione siano  $S_1 = S_{11}$  (Mismatch @ port 1),  $S_2 = S_{22}$  (Mismatch @ port 2),  $S_3 = S_{33}$  (Mismatch @ port 3),  $S_4 = S_{44}$  (Mismatch @ port 4), allora dalle (42)

$$\begin{aligned} b_3(1 - S_3\Gamma_3) &\simeq C \left[ \frac{\Gamma_2}{D} + L(1 - S_2\Gamma_2) \right] b_2 + S_{43}\Gamma_4 b_4 \\ b_4(1 - S_4\Gamma_4) &\simeq C \left[ \Gamma_2 + \frac{L}{D}(1 - S_2\Gamma_2) \right] b_2 + S_{43}\Gamma_3 b_3 \end{aligned} \quad (43)$$

Le (43) sono evidentemente una correzione della terza e quarta equazione delle (39) per tenere conto dei coefficienti di riflessione  $\Gamma_3$  e  $\Gamma_4$ . Dato che in prima approssimazione

$$\frac{b_3}{b_4} \simeq \frac{\frac{\Gamma_2}{D} + L}{\Gamma_2 + \frac{L}{D}}, \quad (44)$$

allora sostituendo la (44) nelle (43) si ottiene

$$\frac{b_3}{b_2} \approx \frac{C \left[ \frac{\Gamma_2}{D} + L(1 - S_2 \Gamma_2) \right]}{1 - S_3 \Gamma_3 - S_{43} \Gamma_4 \frac{\Gamma_2 + \frac{L}{D}}{\frac{\Gamma_2}{D} + L}} \quad (45)$$

$$\frac{b_4}{b_2} \approx \frac{C \left[ \Gamma_2 + \frac{L}{D}(1 - S_2 \Gamma_2) \right]}{1 - S_3 \Gamma_3 - S_{43} \Gamma_4 \frac{\frac{\Gamma_2}{D} + L}{\Gamma_2 + \frac{L}{D}}}$$

Le (45) sono utili per determinare con buona approssimazione la potenza diretta e quella inversa alla porta 2 attraverso la misura della potenza alle porte 3 e 4.

### Riferimento

Clayton R. Paul, "Solution of the Transmission-Line Equations for Three-Conductor Lines in Homogeneous Media," *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, vol. EMC-20, no. 1, pp. 216-222, Feb. 1978.