RUMORE INTRINSECO NEI CIRCUITI

Luigi Millanta, Carlo Carobbi, Novembre 2016

1 - Rumore termico

Qualunque elemento resistivo produce rumore a causa dell'agitazione termica degli elettroni nella materia ("rumore termico" o "rumore Johnson"). È il limite minimo presente in qualsiasi circuito. La tensione di rumore termico ha media nulla, distribuzione di ampiezza gaussiana e valore efficace

$$v_t = \sqrt{4kTBR} \tag{1}$$

presente *a circuito aperto* ai capi della resistenza R, dove: k è la costante di Boltzmann ($1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K), T è la temperatura assoluta (K), B è la banda passante del ricevitore[1]. La temperatura viene di solito convenzionalmente fissata come T_0 = 290 K, ma la (1) è più generale.

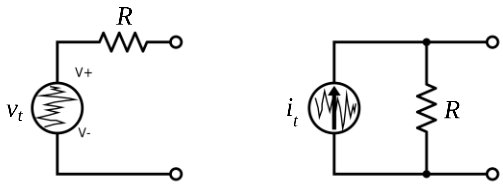

Fig. 1: Rappresentazione del rumore termico in un resistore: generatore di tensione v_t in serie al resistore R. Si può naturalmente adottare il circuito equivalente corrispondente con generatore di corrente $i_t = \sqrt{4ktB/R}$ in parallelo a R.

I componenti circuitali possono produrre rumore termico solo se sono capaci di dissipare energia, per cui una reattanza pura non può generare rumore termico. Assumete infatti di avere un resistere ed una reattanza collegati in parallelo. Attribuite per assurdo un generatore di rumore alla reattanza: la potenza che il resistore fornisce alla reattanza, in equilibrio termodinamico, deve essere uguale alla potenza che la reattanza fornisce al resistore, altrimenti un componente si scalda e l'altro si raffredda. Ma la reattanza non può dissipare potenza, quindi è nulla la potenza che le viene fornita dal resistore, e deve essere parimenti nulla la potenza che essa fornisce al resistore.

Due resistori collegati fra loro si scambiano potenze di rumore che all'equilibrio devono essere uguali. Il massimo trasferimento di potenza si ha quando le due resistenze sono uguali. In questo caso possiamo esprimere la potenza di rumore che un resistore fornisce all'altro come:

$$P_r = \frac{v_t^2}{4R} \tag{2}$$

Sostituendo in questa la (1), si ha:

$$P_r = kTB \tag{3}$$

e la grandezza P_r è detta potenza disponibile di rumore. Indipendente dal valore della resistenza, ed altresì *indipendente dalla frequenza* (a qualunque frequenza, la potenza di rumore contenuta nella banda B è la stessa). Detto altrimenti, la *"densità spettrale di rumore"* kT è indipendente dalla frequenza. Un rumore a distribuzione spettrale uniforme è detto *"rumore bianco"*. Altri tipi di rumore hanno questa caratteristica.

Si dimostra che il rumore termico generato ad una coppia di morsetti da una qualsiasi combinazione di elementi passivi è uguale a quello che sarebbe generato da una resistenza uguale alla parte reale dell'impedenza della combinazione vista ai morsetti stessi.

Attenzione: nei circuiti si effettuano operazioni sui segnali, e queste intervengono ovviamente a modificare la distribuzione naturale del rumore termico. Esempi: a) filtraggio: il rumore non è più uniformemente distribuito su tutto lo spettro; b) rivelazione: il rumore non è più a media nulla (è tutto al disopra o tutto al disotto dello zero); c) passaggio attraverso amplificatore logaritmico: la distribuzione non è più normale. I casi b) e c) sono operazioni non-lineari; ve ne possono essere altre e varie combinazioni (vedi ricevitori a RF con risposta logaritmica quale ad esempio lo Spettro-analizzatore).

2 - Rumore granulare

Rumore noto come "mitraglia" o "shot" oppure "Schottky". È associato alle variazioni casuali del numero e della velocità

[1] A rigori: "banda equivalente di rumore", vedi oltre.

degli elettroni che attraversano una barriera di potenziale (es. giunzioni nei dispositivi a stato solido) o alla generazione/ricombinazione casuale dei portatori di carica nei semiconduttori e si manifesta come fluttuazione di corrente intorno a un valore medio. Il rumore granulare si descrive come una corrente di rumore (valore efficace) data da:

$$i_s = \sqrt{2pI_cB} \tag{4}$$

dove q è la carica dell'elettrone (1.6 x 10^{-19} coulomb) ed I_c è valore medio della corrente. Anche in questo caso l'intensità del rumore è indipendente dalla frequenza (rumore bianco). Per una data banda B l'intensità dipende solo dal valore della corrente continua I_c e può pertanto essere accuratamente determinata semplicemente misurando la corrente che attraversa il dispositivo. Ciò viene sfruttato per realizzare sorgenti di rumore regolabili e tarate.

3 - Rumore di contatto

Il rumore di contatto è associato a varie circostanze in cui si verifica una conduttività fluttuante a causa di imperfetto contatto fra due materiali. A livello macroscopico: qualunque contatto fra due conduttori estesi (interruttori, relè...). A livello microscopico: in materiali composti di particelle in contatto (resistenze a impasto, microfoni a carbone...). Avviene anche nei dispositivi attivi (diodi, transistori) a causa di contatti imperfetti. Caratteristica essenziale di questo tipo di rumore è la sua dipendenza dalla frequenza: *la densità di potenza varia in proporzione inversa alla frequenza.* Per questo motivo è comunemente noto col termine *"rumore 1/f".* Vi sono altri termini usati per lo stesso tipo di rumore: *"flicker" ("sfarfallamento"),* oppure *"rumore in eccesso" ("excess noise")* o anche *"rumore di bassa frequenza".* Quest'ultima dizione è ovviamente dovuta al fatto che il rumore diviene tanto più intenso quanto più è bassa la frequenza.

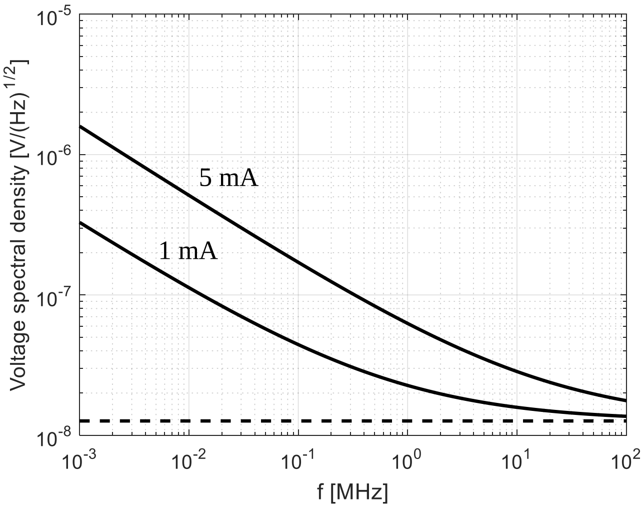

Fig. 2: Densità spettrale di tensione di rumore prodotta da un resistore a impasto di valore 10 kΩ per corrente media I_c = 1 mA e I_c = 5 mA.

Questo rumore può risultare la più importante sorgente di rumore alle basse frequenze (orientativamente inferiori a 1 MHz). L'esempio in Fig. 2 rappresenta la densità spettrale di tensione di rumore prodotta da un resistore a impasto di 10 kΩ al variare della corrente media I_c che lo attraversa (caso tipico, andamento idealizzato).

Il rumore di contatto è direttamente proporzionale all'intensità I_c. L'intensità del rumore espressa mediante una relazione approssimata che dà la corrente di rumore (valore efficace):

$$i_f = \alpha I_c \sqrt{B} \cdot \frac{1}{\sqrt{f}} \tag{5}$$

con α costante che dipende dal materiale e dalla configurazione geometrica.

4 - Banda equivalente di rumore

La banda passante del ricevitore che figura nelle precedenti equazioni è identificata in modo inequivocabile solo nel caso (puramente ideale) in cui il ricevitore abbia amplificazione costante in un certo intervallo di frequenza, di ampiezza B, e zero al difuori. In qualsiasi caso reale, l'amplificazione varia al variare della frequenza ("funzione di trasferimento"). Ciò che interessa è il rumore totale presente all'uscita del ricevitore (più in generale, di qualsiasi amplificatore o quadripolo, attivo o passivo). Se $G(f)$ è il guadagno (di potenza), la potenza di rumore totale all'uscita è espressa da:

$$P_{ru} = \int_0^\infty p_{ri}(f) \cdot G(f) df \tag{6}$$

dove $p_{ri}(f)$ è la *densità di potenza di rumore all'ingresso* (in generale funzione della frequenza) ed è espressa in W/Hz. Nel caso di rumore bianco, $p_{ri}(f) = \text{cost.} = p_{ri}$, e la potenza di rumore all'uscita è data da:

$$P_{ru} = p_{ri} \cdot \int_0^\infty G(f)\,df \tag{7}$$

Questa si può esprimere convenientemente come:

$$P_{ru} = p_{ri} \cdot G_0 \cdot B_{er} \tag{8}$$

dove $G_0 = G(f)\big|_{f=f_0}$ rappresenta il guadagno alla frequenza di riferimento f_0. Normalmente la frequenza di riferimento è la frequenza centrale della banda passante del dispositivo, quella per cui si ha il massimo guadagno. Con questo risulta definita la *banda equivalente di rumore*:

$$B_{er} = \frac{1}{G_0} \cdot \int_0^\infty G(f)\,df \tag{9}$$

Come si vede (Fig. 3), la B_{er} è la larghezza di una banda ideale rettangolare con valore costante del guadagno, pari al valore G_0 alla frequenza di riferimento, tale da racchiudere un'area uguale a quella sottesa dalla curva di amplificazione di potenza del dispositivo reale. La banda indicata con B nelle precedenti equazioni è da intendersi come *banda equivalente di rumore.* Usiamo tuttavia il generico simbolo B per semplicità di scrittura.

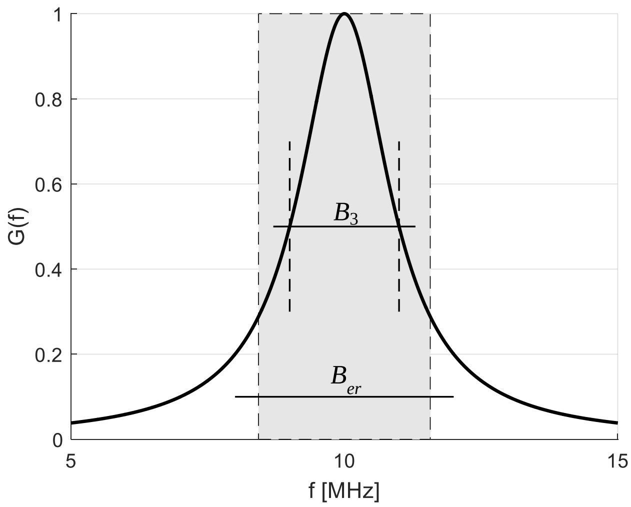

Fig. 3: Banda a –3 dB (B_3) e banda equivalente di rumore (B_{er}). Caso di singolo stadio accordato alla frequenza di 10 MHz e B_3 = 2 MHz.

Il rapporto fra banda passante convenzionale[2] e banda equivalente di rumore dipende dalla forma della curva di risposta del dispositivo o apparato al variare della frequenza. Solitamente la B_{er} è di poco superiore alla banda convenzionale, e si avvicina alla banda convenzionale tanto più quanto più la forma della funzione di trasferimento si approssima alla rettangolare. Per esempio, per un ricevitore a molti stadi accordati a sintonia sfalsata, la B_{er} è superiore solo di pochi % (da 1 a 5%) rispetto alla B_3. Per un singolo stadio accordato, $B_{er} = (\pi/2)B_3$. Lo stesso vale per un singolo stadio passa-basso del 1° ordine. Per molti stadi accordati a sintonia sincrona, la funzione di trasferimento tende a una curva *gaussiana*, e il rapporto tende al valore $\frac{1}{2}\sqrt{\pi/\ln 2} = 1.064$. La conoscenza approssimata della banda equivalente è molto importante per rapide e attendibili valutazioni sulla sensibilità (accuratezza ampiamente sufficiente in qualunque valutazione di massima). In mancanza d'indicazioni specifiche, si può assumere orientativamente una banda equivalente pari a 1.1 o 1.2 volte la B_3. Altrimenti la si deve ricavare da integrazione numerica della $G(f)$ (o da misure con generatore di rumore bianco campione).

[2] La banda passante convenzionale del dispositivo è la cosiddetta "banda a –3 dB" cioè la differenza fra le due frequenze per cui $G(f)$ si è ridotta alla metà del valore massimo G_0. Usiamo il simbolo B_3.

5 - Fattore di rumore

È un numero che caratterizza le prestazioni di un ricevitore per quanto riguarda il rumore. Rappresenta l'effetto globale delle varie sorgenti di rumore presenti all'interno del ricevitore. Vale esclusivamente per *funzionamento lineare*, (il che ben si adatta ad una circostanza come questa in cui siamo evidentemente interessati al funzionamento per piccoli segnali).

Se R_u rappresenta la potenza di rumore presente all'uscita del ricevitore, e R_{ui} rappresenta il rumore che vi sarebbe nel caso ideale in cui il ricevitore non generasse rumore, il fattore di rumore può essere definito come:

$$F = \frac{R_u}{R_{ui}} \tag{10}$$

La grandezza così definita viene chiamata appunto "*fattore di rumore"* ("noise factor"), mentre si chiama usualmente *"cifra di rumore*" ("noise figure") la stessa grandezza espressa in decibel.

Nel caso ideale, R_{ui} risulta semplicemente dal rumore proveniente dal generatore di segnale, amplificato dal ricevitore. La potenza di rumore fornita all'ingresso è data dalla (3), in condizione di adattamento per il massimo trasferimento di potenza. *Si assume come parte integrante della definizione di* F *che tale condizione sia verificata, e si assume altresì che sia fissata la temperatura di riferimento,* $T = T_0 = 290\,\mathrm{K}$. Con queste precisazioni, il rumore d'ingresso è dato da:

$$R_i = kT_0B \tag{11}$$

Se G è il guadagno del ricevitore (quello che sopra designavamo con G_0, lasciamo cadere il pedice), sempre in condizioni di adattamento per il massimo trasferimento di potenza[3], il rumore all'uscita di un ideale ricevitore privo di sorgenti interne di rumore è:

$$R_{ui} = kT_0BG \tag{12}$$

Considerando ora che il rumore all'uscita proviene in parte dall'amplificatore e in parte dal rumore generato all'ingresso, si può immaginare R_u come somma di due contributi separati:

$$R_u = R_{ui} + R \tag{13}$$

dove R è il rumore generato internamente al ricevitore. Quindi la (10) può riscriversi:

$$F = 1 + \frac{R}{R_{ui}} \tag{14}$$

o anche:

$$F = 1 + \frac{R}{GR_i} \tag{15}$$

Un'altra comune definizione di fattore di rumore, equivalente alle precedenti, si basa sui rapporti Segnale/Rumore. Se S_i è la potenza di segnale all'ingresso e S_u è quella all'uscita, si ha:

$$F = \frac{S_i/R_i}{S_u/R_u} \tag{16}$$

e cioè F indica quante volte il rapporto segnale/rumore all'uscita è peggiore di quello all'ingresso. Notate che questa espressione si ricava dalla (10), tenuto conto della (12), semplicemente osservando che S_u/S_i rappresenta il guadagno G del quadripolo: non è una diversa definizione. L'una o l'altra possono essere più convenienti a seconda del caso.

È importante notare che le definizioni precedenti si applicano non solo a ricevitori o amplificatori, ma anche a qualunque quadripolo passivo (purché lineare). In particolare il fattore di rumore si applica a quadripoli in cui si ha una perdita, anziché un guadagno. Caso particolarmente importante è quello dell'attenuatore (rete resistiva adattata all'ingresso e all'uscita): *il fattore di rumore risulta pari al fattore di attenuazione* come si vede considerando che la potenza di segnale viene attenuata di un fattore A (attenuazione), ma la potenza di rumore disponibile all'uscita rimane ancora kTB. Una linea di trasmissione con perdite si comporta come un attenuatore. Le stesse considerazioni valgono per il mescolatore di un ricevitore supereterodina in cui il segnale di uscita a frequenza intermedia è attenuato rispetto al segnale di ingresso a radiofrequenza. Questa attenuazione si chiama *"perdita di conversione*" e il fattore di rumore del mescolatore risulta pari

[3] In queste condizioni, il guadagno si chiama "guadagno disponibile". Nell'ulteriore condizione, comunemente verificata, che la resistenza d'ingresso sia uguale alla resistenza di carico, il guadagno è uguale al quadrato del modulo della funzione di trasferimento.

a tale perdita (talvolta, per certi diodi occorre anche moltiplicare per un fattore che tiene conto della generazione interna di rumore in eccesso rispetto al rumore termico, tipicamente rumore “shot”, fattore che comunque risulta di poco superiore all’unità).

Tenuto conto della definizione (10) e del concetto di rumore interno R, equazione (15), si deduce una importantissima relazione che ci consente di ottenere il fattore di rumore complessivo di un qualunque numero di quadripoli posti in cascata. Supponiamo di avere n quadripoli in cascata, con guadagno $G_1, G_2, \cdots, G_n$ e con rumore interno $R_1, R_2, \cdots, R_n$. Il guadagno totale è $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ e il rumore totale all’uscita si può esprimere come:

$$R_u = R_i \times G_1 G_2 \cdots G_n + R_1 \times G_2 \cdots G_n + \cdots + R_n \tag{17}$$

e questo deve valere (per definizione) $FR_i \times G_1 G_2 \cdots G_n$. Dunque:

$$F = \frac{R_i \times G_1 G_2 \cdots G_n + R_1 \times G_2 \cdots G_n + \cdots + R_n}{R_i \times G_1 G_2 \cdots G_n} \tag{18}$$

Tenendo poi conto che per ognuno dei quadripoli della cascata vale la (15), e cioè $F_1 = 1 + R_1 / G_1 R_i$, $F_2 = 1 + R_2 / G_2 R_i$, ecc., si ricava (formula di Friis):

$$F = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2} + \cdots + \frac{F_n - 1}{G_1 G_2 \cdots G_{n-1}} \tag{19}$$

Alcune importanti proprietà deducibili da questa relazione. L’effetto delle sorgenti di rumore negli stadi successivi al primo è smorzato per via della divisione per il guadagno degli stadi precedenti, cosicché in pratica solo i primissimi stadi di un ricevitore hanno influenza sul rumore complessivo. Si deve però notare anche che, se il guadagno del primo stadio è minore di 1 (se cioè si ha attenuazione: $A = 1/G$, $A > 1$), si introduce un contributo al fattore di rumore complessivo pari all’attenuazione ($F_1 = A$). Non solo: *l’effetto del rumore del secondo stadio è esaltato dalla divisione per* G_1 cioè dalla moltiplicazione per A. Quindi bisogna evitare il più possibile la presenza di attenuazioni nel circuito d’ingresso. Caso importante è quello della linea che collega la sorgente di segnale (p. es. antenna) al primo stadio di amplificazione. Altro caso importante è quello del ricevitore con stadio d’ingresso a mescolatore: la cifra di rumore ottenibile è dominata dalla perdita di conversione (tipicamente dell’ordine di 10 dB) e un basso fattore di rumore può solo ottenersi facendo precedere il mescolatore da un preamplificatore a basso rumore. Si vede infine che il fattore di rumore da solo non è in grado di dare un’indicazione della bontà di un amplificatore dal punto di vista delle prestazioni di rumore. E necessario tenere conto contemporaneamente del guadagno: infatti, a parità del fattore di rumore, l’amplificatore con maggior guadagno dà luogo ad un minore fattore di rumore complessivo nell’intera catena di amplificazione. Nella progettazione di amplificatori a basso rumore si seguono solitamente criteri di compromesso fra minimo rumore e massimo guadagno.

6 - Temperatura equivalente di rumore

Le proprietà di rumore possono convenientemente descriversi anche in termini di *temperatura equivalente di rumore*. Questa si definisce sia per un bipolo che per un quadripolo.

Per un bipolo si definisce la *temperatura equivalente di rumore* come la temperatura (termodinamica) di un resistore che desse la stessa potenza disponibile di rumore del bipolo considerato. Nel caso di un bipolo privo di sorgenti di rumore in eccesso sul rumore termico, quali “shot” o “flicker”, la temperatura di rumore coincide con la temperatura termodinamica del bipolo. Un caso particolarmente significativo è quello in cui il bipolo è un’antenna ricevente. Se si trascurano le perdite all’interno dell’antenna (che introducono di per sé rumore termico), la temperatura equivalente è la temperatura della regione di spazio da cui l’antenna riceve la radiazione.

Per un quadripolo si definisce la “*temperatura equivalente di rumore all’ingresso*” T_e come la temperatura all’ingresso del quadripolo che darebbe conto del rumore R generato internamente dal quadripolo. Dunque è, per definizione:

$$R = kT_e BG \tag{20}$$

Come si vede, il guadagno è qui introdotto perché si vuole riportare il rumore R ad un valore equivalente di ingresso. Tenendo conto che il rumore all’uscita si può esprimere come somma di quello generato dalla terminazione d’ingresso (temperatura equivalente T_{ei}) e di quello generato internamente all’amplificatore (rumore R_a, temperatura equivalente T_{ea}), si può scrivere:

$$R_u = k\left(T_{ei} + T_{ea}\right) BG \tag{21}$$

che fa vedere che il rumore totale all’uscita è attribuibile alla <u>somma</u> della temperatura della terminazione all’ingresso e di quella equivalente all’ingresso del quadripolo. La definizione di temperatura equivalente, a differenza del fattore di rumore, è svincolata dalla scelta convenzionale della temperatura di riferimento T_0.

La temperatura di rumore e il fattore di rumore si possono porre in relazione introducendo l'assunzione della temperatura convenzionale di riferimento all'ingresso, $T = T_0 = 290$ K. Poiché è (R_a è il rumore generato internamente):

$$\frac{R_a}{R_i} = \frac{GT_{ea}}{T_0} \tag{22}$$

Sostituendo nella (15) si ha:

$$F = 1 + \frac{T_{ea}}{T_0} \tag{23}$$

da cui l'importante relazione:

$$T_{ea} = (F-1)T_0 \tag{24}$$

La temperatura di rumore di più elementi in cascata si calcola analogamente a quanto fatto per il fattore di rumore. Dalle definizioni si ha che il rumore totale all'uscita è dato da:

$$R_u = kT_iB(G_1G_2\cdots G_n) + kT_1B(G_1G_2\cdots G_n) + kT_2B(G_2G_3\cdots G_n) + \cdots + kT_nBG_n \tag{25}$$

dove T_i è la temperatura di ingresso, T_1, T_2, … T_n sono le temperature degli n quadripoli che compongono la catena, e G_1, G_2, … G_n sono i relativi guadagni. D'altra parte si ha anche, per l'intera catena di guadagno $G = G_1G_2\cdots G_n$ e temperatura di rumore complessiva T_e:

$$R_u = kT_iB(G_1G_2\cdots G_n) + kT_eB(G_1G_2\cdots G_n) \tag{26}$$

per cui, uguagliando le due espressioni di R_u si ottiene:

$$T_e = T_1 + \frac{T_2}{G_1} + \frac{T_3}{G_1G_2} + \cdots + \frac{T_n}{G_1G_2\cdots G_{n-1}} \tag{27}$$

Questa relazione è l'equivalente della (19), e si vede che le due si corrispondono in base alla (24).

Come si è visto, il fattore di rumore e la temperatura equivalente di rumore sono in relazione biunivoca, per cui *contengono la stessa informazione*. La differenza è in pratica solo la consuetudine d'uso, per cui si tende a usare il fattore di rumore negli usi più tradizionali e la temperatura equivalente nei casi in cui si ha a che fare con amplificazione a basso rumore (per esempio, si dirà che un ricevitore ha una cifra di rumore di 30 dB, piuttosto che dire che ha una temperatura equivalente di rumore all'ingresso di ~ 290000 K, mentre si dirà che la temperatura di rumore è di 10 K anziché dire che la cifra di rumore è 0.15 dB).