Facoltà di Ingegneria
Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Statistica e Probabilità per l'Ingegneria

- Variabili aleatorie - (2^ parte)

1. Variabili aleatorie

Ing. Andrea Zanobini
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Variabili aleatorie

Definizione 1
Una **variabile aleatoria** (o **casuale**) è una funzione reale X definita sullo spazio campione S e a valori reali

$$X : \mathrm{S} \rightarrow \mathbf{R}$$

Essa associa ad ogni possibile risultato di un esperimento, cioè ad ogni elemento dello spazio campione S, un numero reale.

Esempio 1
Si effettua il lancio di una moneta. Lo spazio campione è

$$\mathrm{S} = \{\mathrm{T}, \mathrm{C}\}$$

Ponendo

$$X(\mathrm{C}) = m \qquad X(\mathrm{T}) = n \qquad m, n \in \mathbf{R} \qquad m \neq n$$

si definisce una variabile aleatoria X.

Esempio 2
Si effettuano due lanci di una moneta. Lo spazio campione è

$$S = \{TT, CC, TC, CT\}$$

Ad ogni punto dello spazio campione possiamo associare un numero reale che rappresenta il numero delle volte che esce T, secondo la seguente tabella

Punti campione	TT	TC	CT	CC
X	2	1	1	0

Tabella 1

ossia

$$X(TT) = 2 \qquad X(TC) = 1 \qquad X(CT) = 1 \qquad X(CC) = 0$$

X è una variabile aleatoria.
Si osservi che si possono definire altre variabili aleatorie su questo spazio campione: ad esempio il quadrato del numero delle teste, anziché il numero delle teste, o il numero delle teste meno il numero delle croci.

Definizione 2
Una variabile aleatoria che può assumere solo un numero finito di valori o un'infinità numerabile[1] di valori è detta **variabile aleatoria discreta**, mentre una variabile aleatoria che assume un'infinità non numerabile di valori è detta **continua**.

Osservazione

In generale, se X è una variabile aleatoria, si usano notazioni del tipo seguente

Evento "X assume il valore a" $X = a$

Evento "X assume valori compresi nell'intervallo (a , b)" $a < X < b$

Evento "X assume valori minori o uguali a c" $X \leq c$.

Indichiamo con $P(X = a)$, $P(a < X < b)$, $P(X \leq c)$ le probabilità dei precedenti eventi.

Esempio 3

Si consideri la variabile aleatoria discreta X, definita come il numero di teste T in due lanci di una moneta; si ha ad esempio

$$P(X = 2) = \frac{1}{4} \qquad P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(1 < X < 2) = 0 \qquad P(1 < X \leq 2) = \frac{1}{4} \qquad P(0 \leq X \leq 2) = 1$$

Esempio 4

Si consideri la variabile aleatoria discreta X, definita come il numero ottenuto nel lancio di un dado; si ha ad esempio

$$P(5 < X < 6) = 0 \qquad P(5 \leq X < 6) = \frac{1}{6} \qquad P(1 \leq X \leq 6) = 1$$

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}$$

Distribuzioni di probabilità discrete

Definizione 3
La funzione

$$f(x_k) = P(X = x_k) \qquad k = 1,2,\ldots \qquad (3.1)$$

che ad ogni valore assunto dalla variabile aleatoria discreta X associa la corrispondente probabilità è detta **distribuzione di probabilità** della variabile aleatoria X.

La rappresentazione grafica di $f(x)$ può essere fatta con un **diagramma a barre** o con un **istogramma**.

Definizione 4
Si definisce **funzione di distribuzione** o **funzione di ripartizione** di una variabile aleatoria X la funzione

$$F(x) = P(X \leq x) \qquad x \in \mathbf{R} \qquad (3.2)$$

La funzione F associa ad ogni valore reale x la probabilità che la variabile aleatoria X assuma un valore minore o uguale a x. Essa è definita su **R**, monotona crescente da 0 a 1; il suo grafico è una funzione a gradino.

Esempio 5

Si effettuano due lanci consecutivi di una moneta. La variabile aleatoria X è il numero di volte che esce T ed è descritta dalla tabella 1 (esempio 2).

Si ha

$$P(\mathrm{TT}) = \frac{1}{4} \qquad P(\mathrm{TC}) = \frac{1}{4} \qquad P(\mathrm{CT}) = \frac{1}{4} \qquad P(\mathrm{CC}) = \frac{1}{4}$$

quindi

$$P(X=0) = P(\mathrm{CC}) = \frac{1}{4}$$

$$P(X=1) = P(\mathrm{TC} \cup \mathrm{CT}) = P(\mathrm{TC}) + P(\mathrm{CT}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=2) = P(\mathrm{TT}) = \frac{1}{4}$$

La distribuzione di probabilità è assegnata dalla tabella 2

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Tabella 2

La funzione $f(x)$ può essere rappresentata con un diagramma a barre (figura 1), o con un istogramma (figura 2).

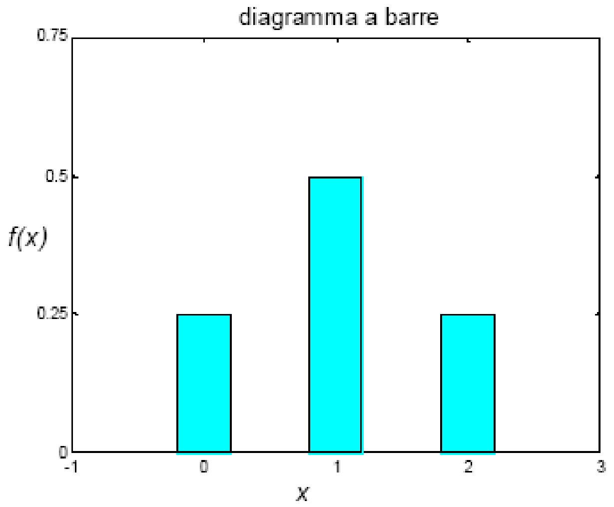


Figura 1

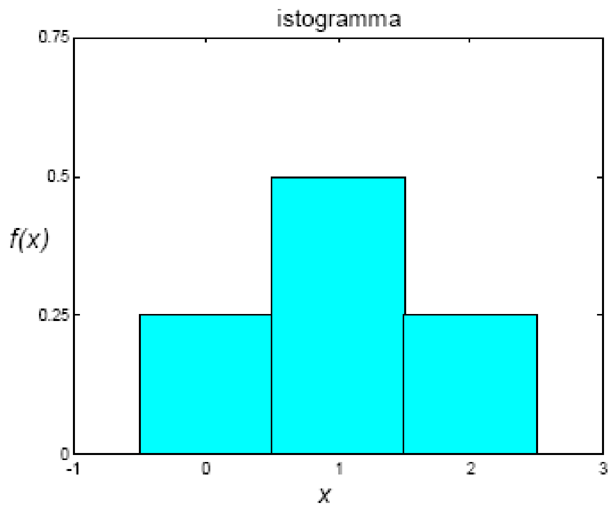


Figura 2

Nel grafico della figura 1 la somma delle ordinate è 1; nel grafico della figura 2 la somma delle aree dei tre rettangoli è 1.

Ricaviamo ora la funzione di distribuzione $F(x)$

x	$F(x) = P(X \le x)$
$x < 0$	0
$0 \le x < 1$	$\frac{1}{4}$
$1 \le x < 2$	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$
$x \ge 2$	$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

La funzione di distribuzione della variabile aleatoria X è quindi

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4} & 0 \le x < 1 \\ \frac{3}{4} & 1 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

$F(x)$ è una funzione a gradino con salto non costante; il grafico è il seguente

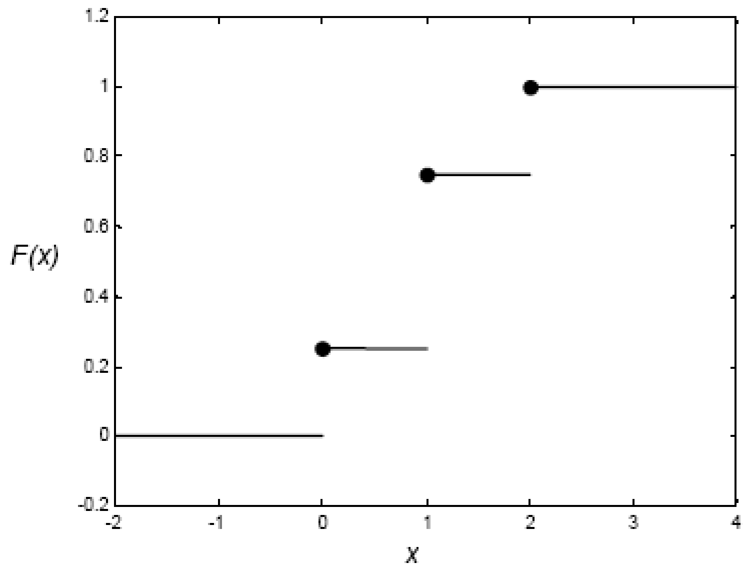


Figura 3

Nell'esempio precedente si può osservare che la funzione di distribuzione $F(x)$ è uguale alla somma delle probabilità

$$f(x_i) = P(X = x_i)$$

per tutti gli $x_i \leq x$ .Questo risultato è vero per ogni variabile aleatoria discreta.

Per una variabile aleatoria discreta si ha quindi la seguente relazione tra funzione di distribuzione e distribuzione di probabilità

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) \qquad (3.3)$$

In generale, nel caso di una variabile aleatoria discreta, una funzione $f(x)$ è una distribuzione di probabilità se

1) $$f(x_i) \geq 0 \qquad \forall x_i \qquad (3.4)$$

2) $$\sum_{x_i} f(x_i) = 1 \qquad (3.5)$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i possibili valori x_i assunti dalla variabile aleatoria X.

Esempio 6

Sia data la funzione

$$f(x) = \frac{x+3}{15} \qquad x = 1,2,3\,.$$

Verificare se $f(x)$ è una distribuzione di probabilità di una data variabile aleatoria discreta *X*.

Sostituendo $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$ si ottiene

$$f(1) = \frac{4}{15} \qquad f(2) = \frac{1}{3} \qquad f(3) = \frac{6}{15}\,.$$

Questi valori sono tutti compresi fra 0 e 1; inoltre la loro somma vale 1, perciò la funzione assegnata è una distribuzione di probabilità discreta.

Esempio 7

Trovare il valore della costante $k \in \mathbf{R}$ in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x & x = 1,2,3,4,5 \\ k & x = 6 \end{cases}$$

sia una distribuzione di probabilità discreta.

Trovare la funzione di distribuzione.

Deve essere

1) $f(x_i) \geq 0 \qquad \forall x_i \qquad \Rightarrow \quad k \geq 0$

2) $\sum_{x_i} f(x_i) = 1$

$$\sum_{x_i} f(x_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + k = 1$$

$$k = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \right) = 1 - \frac{31}{32} = \frac{1}{32}$$

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} \right)^x & x = 1,2,3,4,5 \\ \frac{1}{32} & x = 6 \end{cases}$$

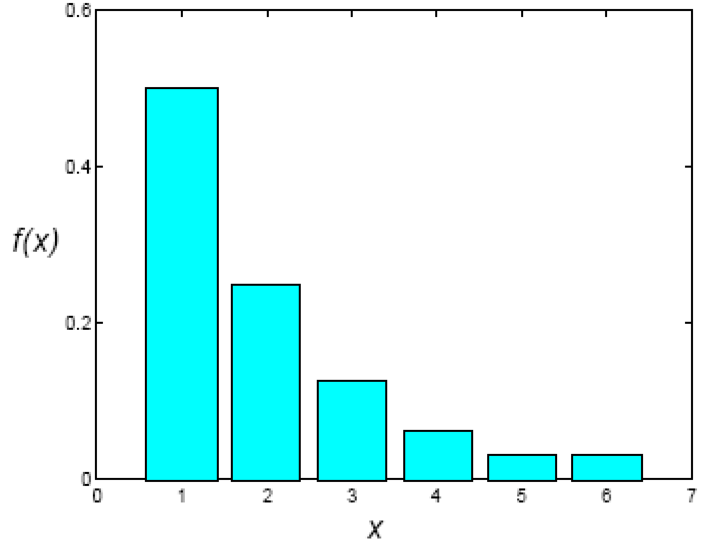


Figura 4

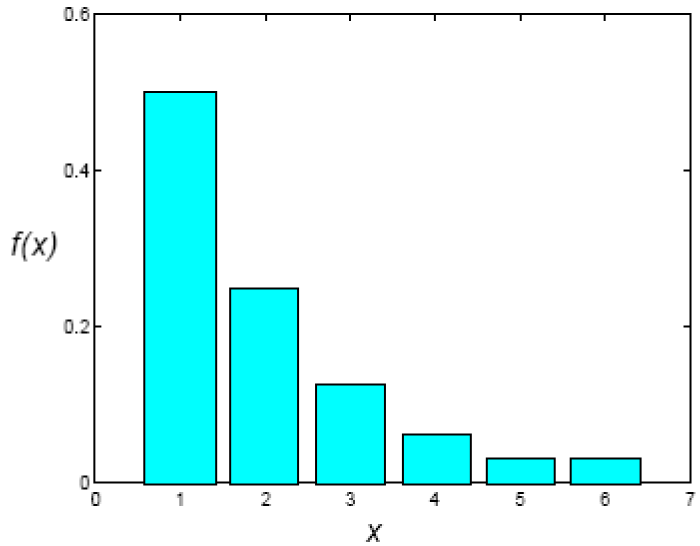
La distribuzione di probabilità può essere scritta anche sotto forma di tabella (tabella 4) ed è rappresentata nella figura 4.

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$

Tabella 4

La funzione di distribuzione è definita dalla tabella

x	$F(x) = P(X \leq x)$
$x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	$\frac{1}{2}$
$2 \leq x < 3$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
$3 \leq x < 4$	$\frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
$4 \leq x < 5$	$\frac{7}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$
$5 \leq x < 6$	$\frac{15}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$
$x \geq 6$	$\frac{31}{32} + \frac{1}{32} = 1$



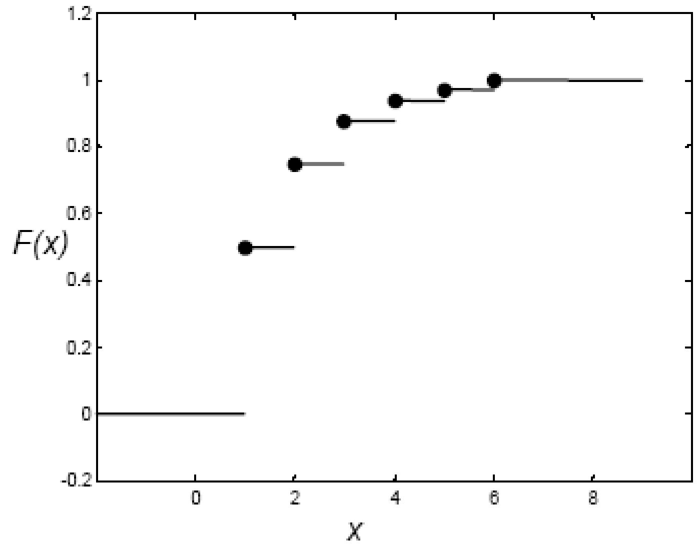


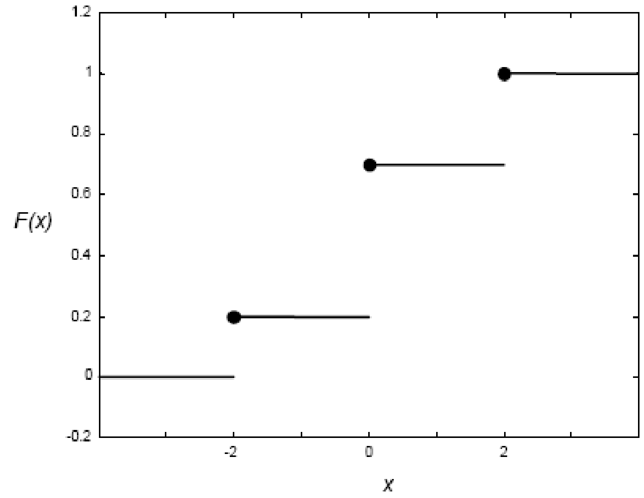
Figura 5

Esempio 8

Sia data la funzione di distribuzione $F(x)$ della variabile aleatoria discreta X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -2 \\ 0.2 & -2 \le x < 0 \\ 0.7 & 0 \le x < 2 \\ 1 & x \ge 2 \end{cases}$$

Determinare la distribuzione di probabilità $f(x)$.



Si ha

$$f(-2) = 0.2 - 0 = 0.2$$
$$f(0) = 0.7 - 0.2 = 0.5$$
$$f(2) = 1 - 0.7 = 0.3$$

La distribuzione di probabilità $f(x)$ è la seguente

$$f(x) = \begin{cases} 0.2 & x = -2 \\ 0.5 & x = 0 \\ 0.3 & x = 2 \end{cases}$$

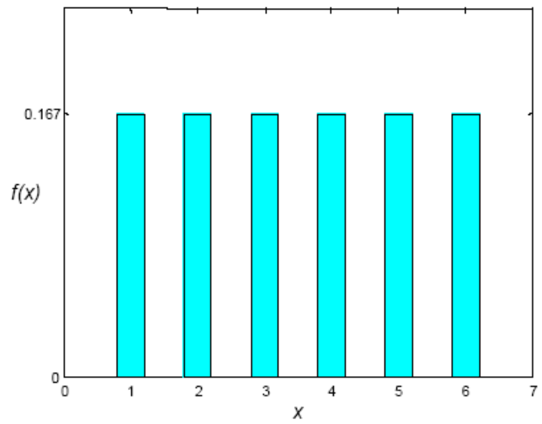
Esempio 9

Si consideri la variabile aleatoria discreta X = numero ottenuto nel lancio di un dado; i valori che X può assumere sono i numeri 1,2,...,6.

La distribuzione di probabilità è definita dalla tabella 6; il grafico è rappresentato nella figura 7

x_i	1	2	3	4	5	6
$f(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

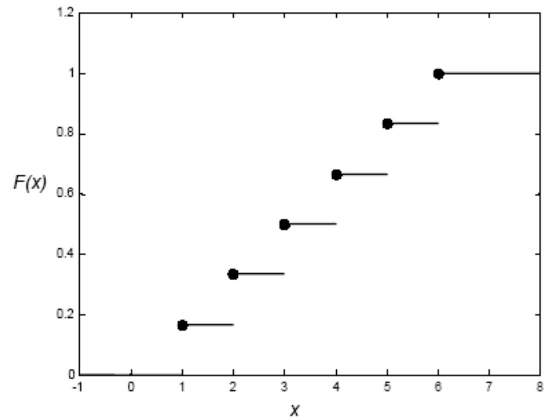
Tabella 6



La funzione di distribuzione $F(x)$ è definita dalla tabella 7. $F(x)$ è una funzione a gradino; il salto fra i gradini è costante e vale sempre $\frac{1}{6}$, il grafico è rappresentato nella figura 8.

x	$F(x) = P(X \leq x)$
$x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	$\frac{1}{6}$
$2 \leq x < 3$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$
$3 \leq x < 4$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$
$4 \leq x < 5$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$
$5 \leq x < 6$	$\frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$
$x \geq 6$	$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$

Tabella 7



Esempio 10
Si effettua il lancio di due dadi. La variabile aleatoria X è la somma dei risultati dei due dadi. Determinare la distribuzione di probabilità $f(x)$ e la funzione di distribuzione $F(x)$ e disegnarne i grafici.

Lo spazio campione S è illustrato dalla figura 9

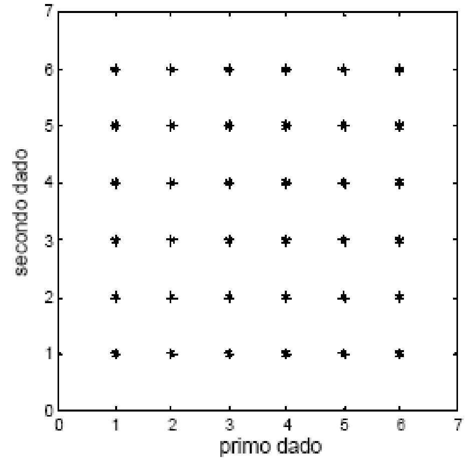


Figura 9

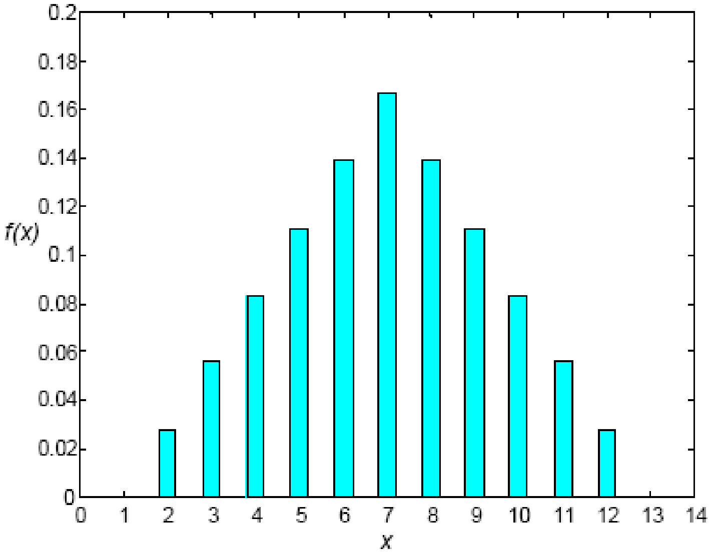
La distribuzione di probabilità $f(x)$ è data dalla tabella 8; il grafico è rappresentato nella figura 10 (pag. seguente)

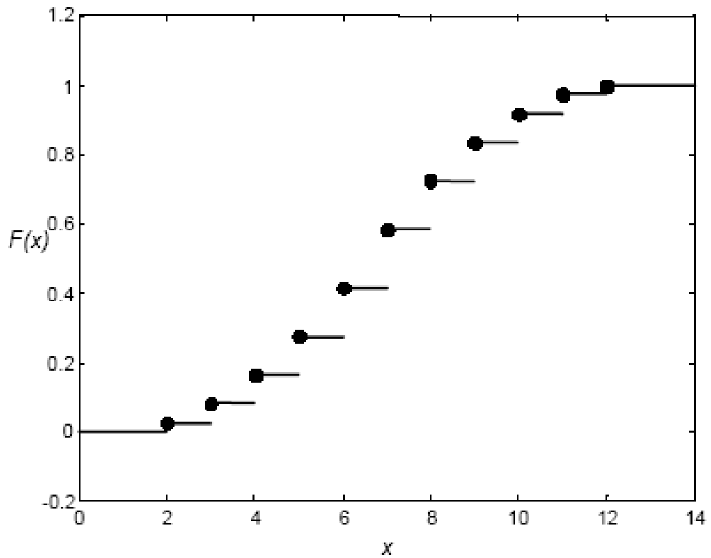
x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Tabella 8

La funzione di distribuzione $F(x)$ è definita dalla tabella 9 ed è una funzione a gradino con salto non costante (figura 11)

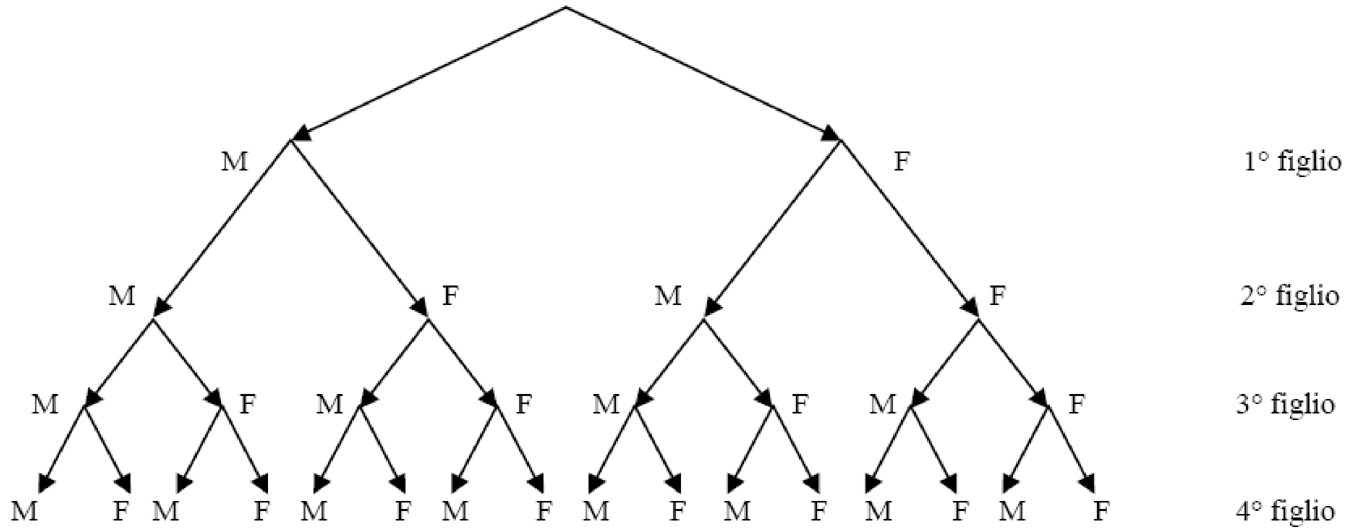
x	$F(x)=P(X \le x)$	x	$F(x)=P(X \le x)$
$x<2$	0	$7 \le x < 8$	$\frac{7}{12}$
$2 \le x < 3$	$\frac{1}{36}$	$8 \le x < 9$	$\frac{13}{18}$
$3 \le x < 4$	$\frac{1}{12}$	$9 \le x < 10$	$\frac{15}{18}$
$4 \le x < 5$	$\frac{1}{6}$	$10 \le x < 11$	$\frac{11}{12}$
$5 \le x < 6$	$\frac{5}{18}$	$11 \le x < 12$	$\frac{35}{36}$
$6 \le x < 7$	$\frac{15}{36}$	$x \ge 12$	1





Esempio 11

Si considerino le famiglie con 4 figli; la composizione delle famiglie, tenendo conto del sesso dei figli e dell'ordine di nascita, si può rappresentare con il seguente diagramma ad albero



Il numero dei casi possibili è $2^4 = 16$. Se si trascura l'ordine di nascita, i 16 casi si riducono ai 5 seguenti

MMMM MMMF MMFF MFFF FFFF

Supponendo che gli eventi "nascita di un maschio" e "nascita di una femmina" siano equiprobabili, si costruisce la seguente tabella della distribuzione di probabilità

evento	MMMM	MMMF	MMFF	MFFF	FFFF
n° casi favorevoli	1	4	6	4	1
probabilità	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Tabella 10

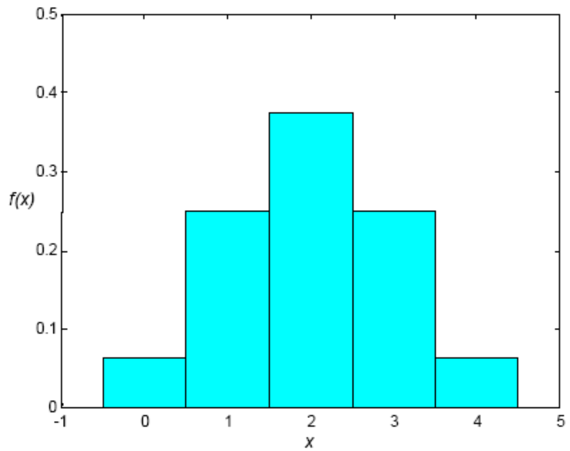
Scegliendo come variabile aleatoria X il numero delle figlie femmine, la tabella della distribuzione di probabilità $f(x)$ può essere riscritta nel modo seguente

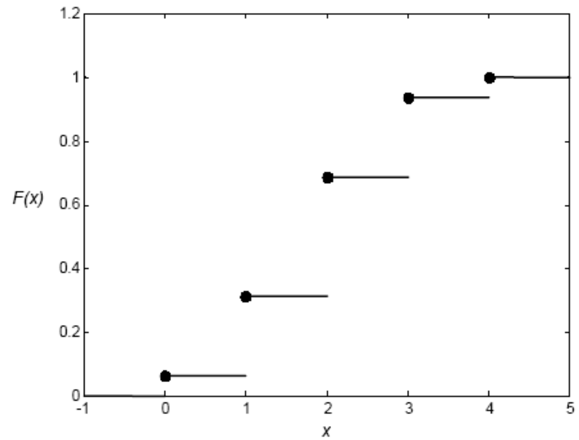
x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Tabella 11

La funzione di distribuzione è la seguente

x	$F(x) = P(X \le x)$
$x < 0$	0
$0 \le x < 1$	$\frac{1}{16}$
$1 \le x < 2$	$\frac{5}{16}$
$2 \le x < 3$	$\frac{11}{16}$
$3 \le x < 4$	$\frac{15}{16}$
$x \ge 4$	1





Densità di probabilità

Se X è una variabile aleatoria continua, la probabilità che X assuma un certo valore x fissato è in generale zero (si veda anche l'osservazione al termine di questo §, pag. 101), quindi non ha senso definire una distribuzione di probabilità con lo stesso procedimento seguito per una variabile aleatoria discreta. Nel caso di una variabile aleatoria continua ha senso invece calcolare la probabilità che X sia compresa fra a e b, dove a e b sono costanti, con $a \le b$.

1)	$f(x) \ge 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R}$	(3.6)
2)	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$	(3.7)

Si definisce poi la probabilità che X sia compresa fra a e b nel modo seguente

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Si può dimostrare che questa definizione soddisfa gli assiomi della teoria della probabilità.
Una funzione $f(x)$ che soddisfi le condizioni (3.6) e (3.7) è detta **densità di probabilità**.

Esempio 12

Se si sceglie a caso un adulto da una popolazione e si misura la sua altezza, la probabilità che l'altezza X sia esattamente 175 cm è uguale a zero, perché la misura viene fatta con uno strumento avente precisione finita. Tuttavia si ha una certa probabilità non nulla che X sia compresa ad esempio fra 174.9 cm e 175.1 cm.

Esempio 13

Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{8} & 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Verificare che $f(x)$ è una densità di probabilità di una variabile aleatoria continua X e calcolare la probabilità che la variabile aleatoria X avente densità di probabilità $f(x)$ sia

a – minore di 2;

b – compresa fra 1 e 3.

Deve essere

1) $$f(x) \ge 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R}$$

2) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8} & 0\le x\le 4\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}.$$

La prima condizione è verificata $\forall x \in \mathbf{R}$. Inoltre si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_0^4 \frac{x}{8}dx=\left.\frac{x^2}{16}\right|_0^4=1.$$

a – $$P(X<2)=\int^2 f(x)dx=\int^2 \frac{x}{8}dx=\left.\frac{x^2}{16}\right|^2=\frac{1}{4}$$

b – $$P(1<X<3)=\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3 \frac{x}{8}dx=\left.\frac{x^2}{16}\right|_1^3=\frac{9}{16}-\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

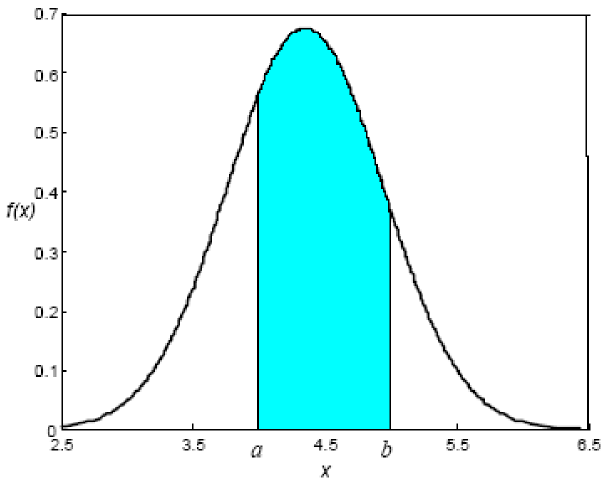
Definizione 5

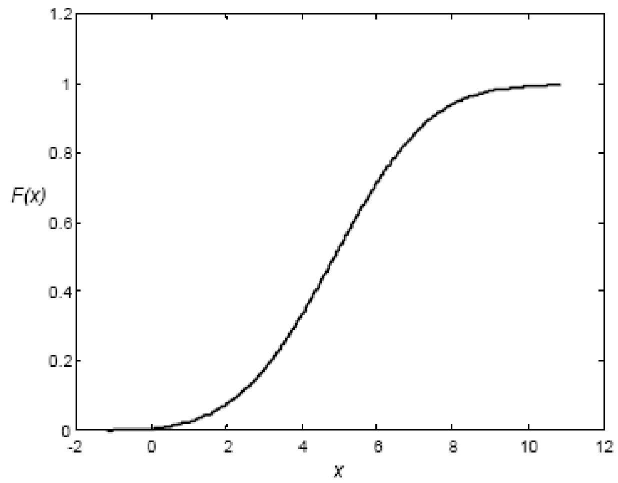
Si definisce **funzione di distribuzione** o **funzione di ripartizione** della variabile aleatoria continua X la funzione

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{3.8}$$

Dalla definizione di $F(x)$ come funzione integrale, segue che $F(x)$ è una funzione continua; inoltre, per il teorema fondamentale del calcolo integrale, in tutti i punti in cui $f(x)$ è continua, la derivata della funzione di distribuzione $F(x)$ è la densità di probabilità $f(x)$

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$





Osservazione – Eventi di probabilità nulla.

La definizione di probabilità nel caso continuo presuppone l'esistenza di un'opportuna funzione $f(x)$, il cui integrale sull'intervallo (a,b) fornisce la probabilità che la variabile aleatoria continua X assuma valori appartenenti ad (a,b); se l'intervallo si riduce a un solo punto l'integrale è nullo.

Pertanto, se X è una variabile aleatoria continua, la probabilità che essa assuma un valore fissato è sempre zero

$$P(X = x) = 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

1 – Nel continuo l'espressione "evento di probabilità nulla" non è sinonimo di "evento impossibile", come invece accade nel discreto. Dunque nel continuo è significativo soltanto calcolare la probabilità che X assuma valori in un dato intervallo: questa è una prima sostanziale differenza tra variabili discrete e continue.

2 – Quanto detto al punto 1 significa che, se X è una variabile aleatoria continua, allora

$$P(X \leq a) = P(X < a)$$
$$P(X \geq a) = P(X > a)$$
$$P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b)\ .$$

3 – Da questo segue anche che la densità $f(x)$ non rappresenta la probabilità $P(X = x)$. Infatti la probabilità $P(X = x)$ è sempre nulla per ogni $x \in \mathbf{R}$, mentre $f(x)$ non è dappertutto nulla.

La funzione $f(x)$ non è una probabilità, è solo il suo integrale su un intervallo che ha il significato di probabilità. Nel caso discreto invece, la distribuzione di probabilità $f(x_k)$ è per definizione la probabilità $P(X = x_k)$.

Esempio 14

Definiamo la funzione $f(x)$ (figura 16)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

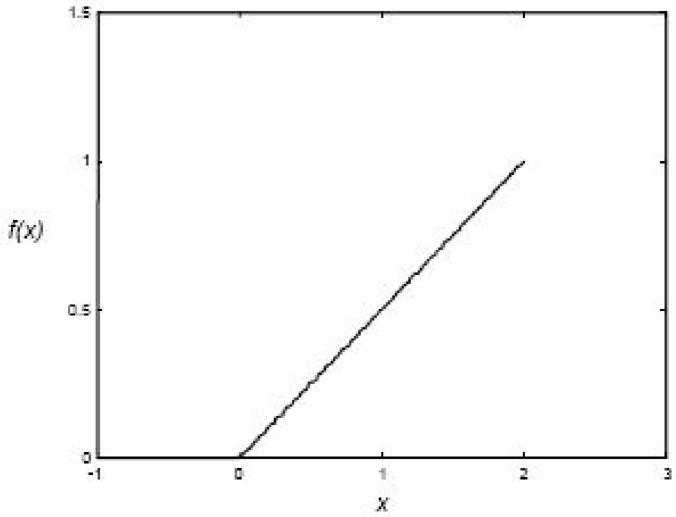


Figura 16

Si può verificare che $f(x)$ è una densità di probabilità; infatti

1) $f(x) \ge 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R}$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = 1$

Troviamo la funzione di distribuzione

Per $x < 0$ $\qquad F(x) = 0$

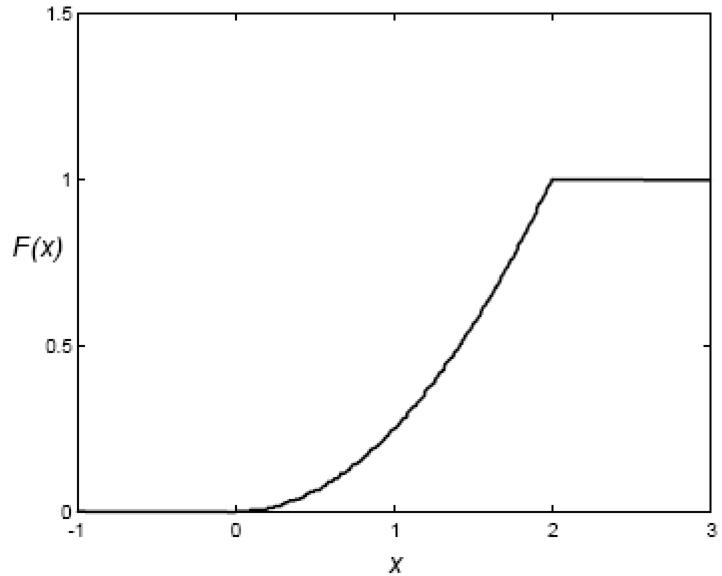
Per $0 \le x \le 2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{2} t\,dt = \frac{1}{4}x^2$$

Per $x > 2$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{2} \frac{1}{2} tdt = 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \dfrac{1}{4}x^2 & 0 \le x \le 2 \\ 1 & x > 2 \end{cases}$$



Esempio 15

Trovare la probabilità che una variabile aleatoria X avente la densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2 - x & 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

assuma valori compresi

a – fra 0.2 e 0.8

b – fra 0.6 e 1.2

c – maggiori di 1.8 .

a – $$P(0.2 < X < 0.8) = \int_{0.2}^{0.8} f(x)dx = \int_{0.2}^{0.8} x dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0.2}^{0.8} = \frac{0.64}{2} - \frac{0.04}{2} = 0.3$$

b – $$P(0.6 < X < 1.2) = \int_{0.6}^{1.2} f(x)dx = \int_{0.6}^{1} x dx + \int_{1}^{1.2} (2-x)dx =$$

$$= \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0.6}^{1} + \left.\left(-\frac{(2-x)^2}{2}\right)\right|_{1}^{1.2} = \frac{1}{2} - \frac{0.36}{2} - \frac{0.64}{2} + \frac{1}{2} = 0.5$$

c – $$P(X > 1.8) = \int_{1.8}^{2} f(x)dx = \int_{1.8}^{2} (2-x)dx = \left.\left(-\frac{(2-x)^2}{2}\right)\right|_{1.8}^{2} = \frac{0.04}{2} = 0.02$$

Distribuzione Esponenziale

Esempio 16
La funzione di distribuzione di una variabile aleatoria X è

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

a – Calcolare le probabilità $P(X > 2)$ e $P(-3 < X \leq 4)$.
b – Determinare la densità di probabilità $f(x)$.

a –

$$P(X > 2) = 1 - P(x \leq 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-4}) = e^{-4} \cong 0.0183$$

$$P(-3 < X \leq 4) = F(4) - F(-3) = 1 - e^{-8} - 0 \cong 0.9997$$

b –

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Disegnare da soli f(x) e F(x) e, in seguito, trovare valor medio (e varianza) !!

Esempio 17

Sapendo che la funzione di distribuzione di una variabile aleatoria continua X è

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \left(\dfrac{x}{3}\right)^3 & 0 \le x \le 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

calcolare le probabilità $P\left(1 < X < \dfrac{3}{2}\right)$ e $P(2 < X < 4)$.

a – $$P\left(1 < X < \frac{3}{2}\right) = F\left(\frac{3}{2}\right) - F(1) = \left(\frac{3}{6}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{27} = \frac{19}{216} \equiv 0.088 = 8.8\%$$

b – $$P(2 < X < 4) = F(4) - F(2) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{19}{27} \cong 0.704 = 70.4\%$$

Esempio 18

Trovare il valore della costante $c \in \mathbf{R}$ in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 & 0 < x < 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

sia una densità di probabilità.

Trovare la funzione di distribuzione $F(x)$ e calcolare la probabilità $P(1 < X < 2)$.

Deve essere

1) $f(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R} \qquad \Rightarrow \quad c \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{3} cx^2 dx = c\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = 9c$$

$$9c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{9}$$

Troviamo la funzione di distribuzione

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \,.$$

Per $x \le 0$ $\quad F(x) = 0$

Per $0 < x < 3$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \frac{1}{9} t^2 dt = \frac{1}{27} x^3$

Per $x \ge 3$ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{3} f(t)dt + \int_{3}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{3} \frac{1}{9} t^2 dt = 1$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{1}{27} x^3 & 0 < x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

$$P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = \frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

Oppure

$$P(1 < X < 2) = \int_{1}^{2} \frac{1}{9} x^2 dx = \frac{1}{9} \left. \frac{x^3}{3} \right|_{1}^{2} = \frac{8}{27} - \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$

Esempio 19

Trovare il valore della costante $c \in \mathbf{R}$ tale che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^2} & 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

sia una densità di probabilità e disegnare il grafico di $f(x)$.

Trovare la probabilità che la variabile aleatoria X, avente densità di probabilità $f(x)$, sia compresa fra 1.5 e 2 .

Deve essere

1) $f(x) \ge 0 \qquad \forall x \in$]

2) $\int^{\infty} f(x)dx = 1$

$= c($

$1 \le$

altr

Fare da soli

l'esempio 20

Con i disegni di

f(x) ed F(x) !!

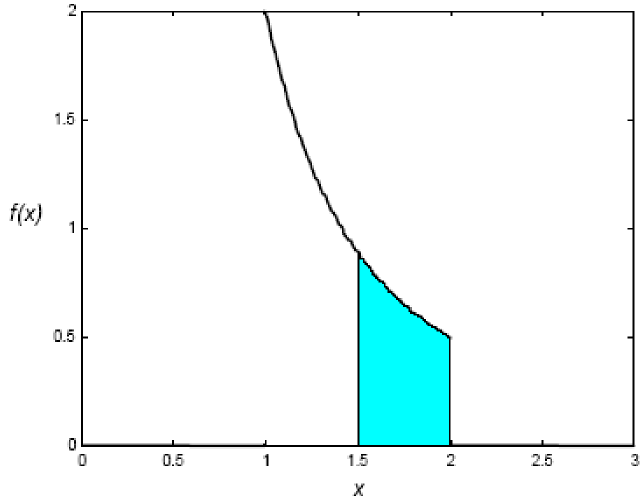


Figura 18

$$P\left(\frac{3}{2} < X < 2\right) = \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{2}{x^2}dx = 2\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\frac{3}{2}}^{2} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Parametri di una distribuzione

Valor medio – Caso discreto

Definizione 6
Si definisce **valor medio** o **speranza matematica** di una variabile aleatoria discreta X la quantità

$$\mu = E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \ldots + x_n P(X = x_n) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \tag{3.9}$$

Il valor medio di X è un numero che indica dove è "centrata" la variabile aleatoria X, ossia attorno a quale valore ci aspettiamo che cadano i valori di X; esso rappresenta quindi una misura di tendenza centrale. Il valor medio di X può non essere un valore effettivamente assunto da X.

Esempio 21
Se la variabile aleatoria X è il punteggio ottenuto nel lancio di un dado, poiché i 6 risultati possibili sono ugualmente probabili, si ha

$$\mu = E(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$$

Esempio 22

La variabile aleatoria X indica la somma dei punti ottenuti con il lancio di due dadi.
La tabella della distribuzione di probabilità $f(x)$ è la seguente (vedere esempio 10)

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Tabella 13

Per il valor medio si ottiene

$$\mu = \sum_{i=2}^{12} x_i \cdot f(x_i) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \ldots + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$$

Si noti che in questo esempio i valori x_i non sono ugualmente probabili.

Esempio 23
Trovare il valor medio della variabile aleatoria X definita come il numero di teste ottenute con tre lanci successivi di una moneta.

I casi possibili sono $2^3 = 8$

$$
\begin{array}{lll}
\text{CCC} & \text{nessuna testa} & X = 0 \\
\left.\begin{array}{l}\text{CCT}\\ \text{CTC}\\ \text{TCC}\end{array}\right\} & \text{1 testa} & X = 1 \\
\left.\begin{array}{l}\text{CTT}\\ \text{TCT}\\ \text{TTC}\end{array}\right\} & \text{2 teste} & X = 2 \\
\text{TTT} & \text{3 teste} & X = 3
\end{array}
$$

La distribuzione di probabilità $f(x)$ è definita dalla tabella 14

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Tabella 14

Il valor medio è

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}.$$

Esempio 24

Si lancia un dado: un giocatore vince € 2000 se esce il 2, € 4000 se esce il 4, perde € 3000 se esce il 6; se esce un numero dispari non vince né perde nulla.

Determinare il guadagno medio del giocatore.

La variabile aleatoria X indica il guadagno/perdita del giocatore.

Nella tabella 15 si riportano le probabilità associate ai guadagni/perdite

x_i	0	+ 2000	0	+ 4000	0	−3000
$f(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Il valor medio è

$$\mu = 0 \cdot \frac{1}{6} + 2000 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 4000 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{6} - 3000 \cdot \frac{1}{6} = 500$$

Il guadagno medio è di € 500.

Fare da soli gli esempi 25 e 26 !!

Valor medio – Caso continuo

Definizione 7
Si definisce **valor medio** di X la quantità

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \tag{3.10}$$

Esempio 27
Sia data la densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il valor medio di X è

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{0}^{2} x \cdot \frac{1}{2} x dx = \left. \frac{x^3}{6} \right|_0^2 = \frac{4}{3}$$

Varianza e scarto quadratico medio

Definizione 8
Si definisce **varianza** della variabile aleatoria X la quantità

$$\sigma^2 = \mathrm{var}(X) = E[(X-\mu)^2] \qquad (3.11)$$

dove μ è il valor medio di X.

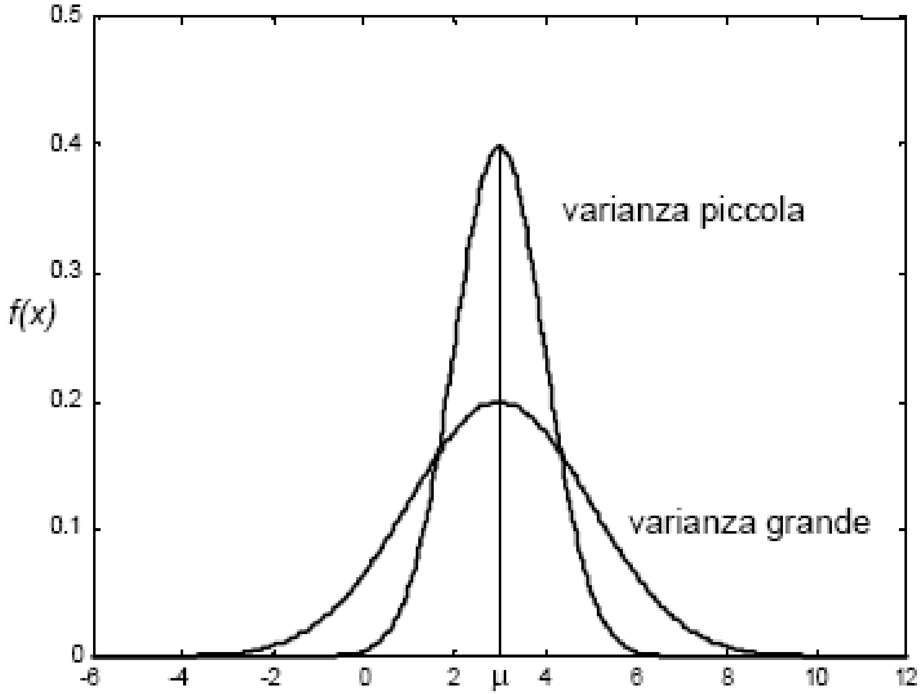
Definizione 9
La radice quadrata non negativa

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{var}(X)} = \sqrt{E[(X-\mu)^2]} \qquad (3.12)$$

è detta **scarto quadratico medio** o **deviazione standard** di X.

Nota importante

La varianza (o la deviazione standard) è una misura della dispersione dei valori della variabile aleatoria X attorno al valor medio μ.
Se i valori sono concentrati vicino alla media, la varianza è piccola, mentre se i valori sono dispersi lontano dal valor medio, la varianza è grande.



Varianza e scarto quadratico medio – Caso discreto

Definizione 10
Si definisce **varianza** della variabile aleatoria discreta X, avente valor medio μ, la quantità

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i) \tag{3.13}$$

Definizione 11
Si definisce **deviazione standard** o **scarto quadratico medio** della variabile aleatoria discreta X, avente valor medio μ, la quantità

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 f(x_i)} \tag{3.14}$$

La varianza può anche essere calcolata con la seguente formula, alternativa alla (3.13)

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - \mu^2$$

Esempio 28

Trovare la varianza della variabile aleatoria X definita come il numero di teste ottenute con tre lanci successivi di una moneta .

Nell'esempio 23 è stato calcolato il valor medio $\mu = \frac{3}{2}$ della variabile X.

Per la varianza, con la (3.13) si ha

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{4}\left(x_i - \frac{3}{2}\right)^2 f(x_i) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \frac{1}{8} + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 \frac{3}{8} + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \frac{3}{8} + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 \frac{1}{8} = \frac{3}{4}\,.$$

Esempio 29

Trovare la varianza della variabile aleatoria X definita come la somma dei punti ottenuti con il lancio di due dadi.

Nell'esempio 22 è stato calcolato il valor medio $\mu = 7$ della variabile X.
Per la varianza, con la (3.15) si ha

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{11} x_i^2 f(x_i) - 49 = 4 \cdot \frac{1}{36} + 9 \cdot \frac{2}{36} + \ldots + 121 \cdot \frac{2}{36} + 144 \cdot \frac{1}{36} - 49 = \frac{35}{6}$$

Fare da soli l'esempio 30 con il disegno di P(x) !!

Varianza e scarto quadratico medio – Caso continuo

Definizione 12
Si definisce **varianza** della variabile aleatoria continua X la quantità

$$\sigma^2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx \qquad (3.16)$$

Definizione 13
Si definisce **deviazione standard** o **scarto quadratico medio** della variabile aleatoria continua X la quantità

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx} \qquad (3.17)$$

La varianza può anche essere calcolata con la seguente formula, alternativa alla (3.16)

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2$$

Esempio 31

Calcolare varianza e deviazione standard della densità di probabilità

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il valor medio è $\mu = \frac{4}{3}$ (vedere esempio 27). Per la varianza, con la (3.16) si ha

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{4}{3} \right)^2 f(x)dx = \int_0^2 \left(x - \frac{4}{3} \right)^2 \frac{x}{2} dx = \frac{2}{9}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3} .$$

Applicando in alternativa la (3.18) si ha

$$\sigma^2 = \int_0^2 x^2 \frac{1}{2} xdx - \frac{16}{9} = \left| \frac{1}{8} x^4 \right|_0^2 - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9} .$$

Esempio 32

Data la densità di probabilità

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x+1)}{3} & 0<x<1\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

trovare il valor medio e la varianza.

$$\mu=\int_0^1 x\cdot\frac{2(x+1)}{3}dx=\frac{2}{3}\int_0^1\left(x^2+x\right)dx=\frac{2}{3}\cdot\left|\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{9}$$

$$\sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-\mu^2=\int_0^1 x^2\cdot\frac{2(x+1)}{3}dx-\left(\frac{5}{9}\right)^2=\frac{2}{3}\int_0^1\left(x^3+x^2\right)dx-\frac{25}{81}=\frac{13}{162}$$

Fare da soli gli esempi 33 e 34 con i disegni di f(x) ed F(x) !!

Proprietà di valor medio e varianza

Proprietà 1
Sia X una variabile aleatoria con valor medio $E(X)$; si ha

$$E(aX+b) = aE(X)+b \qquad a,b \in \mathbf{R} \tag{3.19}$$

$$\mathrm{var}(aX+b) = a^2 \mathrm{var}(X) \qquad a,b \in \mathbf{R} \tag{3.20}$$

Proprietà 2
Siano X e Y variabili aleatorie con valori medi $E(X)$ e $E(Y)$; si ha

$$E(aX+bY) = aE(X)+bE(\mathrm{Y}) \qquad a,b \in \mathbf{R} \tag{3.21}$$

Proprietà 3
Siano X e Y variabili aleatorie indipendenti (ciò avviene se gli eventi $X = x$ e $Y = y$ sono indipendenti per ogni x e y); si ha

$$\mathrm{var}\,(aX+bY) = a^2 \mathrm{var}\,(X)+b^2 \mathrm{var}\,(Y) \qquad a,b \in \mathbf{R} \tag{3.22}$$

Un caso particolare delle proprietà 2 e 3, degno di nota, è il seguente

$$\begin{aligned} E(X-Y) &= E(X)-E(\mathrm{Y}) \\ \mathrm{var}\,(X-Y) &= \mathrm{var}\,(X)+\mathrm{var}\,(Y) \end{aligned} \tag{3.23}$$

Definizione 14

Sia X una variabile aleatoria con valor medio μ e deviazione standard σ. Si definisce **variabile aleatoria standardizzata *Z*** associata a X la variabile aleatoria

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \tag{3.24}$$

Proprietà 4

La variabile aleatoria standardizzata Z ha valor medio 0 e varianza 1

$$\mu = E(Z) = 0 \qquad \sigma^2 = \mathrm{var}\,(Z) = 1 \tag{3.25}$$

Esempio 35

Una variabile aleatoria discreta X ha la seguente distribuzione di probabilità

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	0.4	0.4	0.2

Calcolare il valor medio e la varianza della variabile aleatoria $Y = 2X - 1$.

Calcoliamo il valor medio e la varianza della variabile aleatoria X con le formule (3.9) e (3.15)

$$E(X) = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.2 = 0.8$$

$$\mathrm{var}\,(X) = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.2 - 0.8^2 = 0.56$$

Calcoliamo ora il valor medio e la varianza della variabile aleatoria Y con le formule (3.19) e (3.20)

$$E(Y) = E(2X-1) = 2E(X) - 1 = 2 \cdot 0.8 - 1 = 0.6$$

$$\mathrm{var}\,(Y) = \mathrm{var}\,(2X-1) = 4 \cdot \mathrm{var}\,(X) = 4 \cdot 0.56 = 2.24$$

Esempio 36

Determinare il valor medio e la varianza della somma dei punti ottenuti nel lancio di una coppia di dadi.

a – Valor medio. Per la proprietà 2 si ha

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$E(X) = E(Y) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = \frac{7}{2}$$

$$E(X+Y) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$$

b – Varianza. Per la proprietà 3 si ha

$$\mathrm{var}\,(X+Y) = \mathrm{var}\,(X) + \mathrm{var}\,(Y)$$

Per il calcolo della varianza di X ci serviamo della formula (3.15)

$$\mathrm{var}\,(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - E(X)^2 = 1^2\cdot\frac{1}{6} + 2^2\cdot\frac{1}{6} + 3^2\cdot\frac{1}{6}$$

$$+ 4^2\cdot\frac{1}{6} + 5^2\cdot\frac{1}{6} + 6^2\cdot\frac{1}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}$$

$$\mathrm{var}\,(X) = \mathrm{var}\,(Y) = \frac{35}{12}$$

$$\mathrm{var}\,(X+Y) = \mathrm{var}\,(X) + \mathrm{var}\,(Y) = \frac{35}{12} + \frac{35}{12} = \frac{35}{6}$$

Altre misure di tendenza centrale – Moda e mediana

Come abbiamo già visto, il valor medio di una variabile aleatoria X fornisce una misura di tendenza centrale per i valori della distribuzione. Sebbene il valor medio sia la misura più usata per questo scopo, esistono anche altre misure.

Definizione 15
La **moda** $\tilde{x}$ è il valore che si verifica il maggior numero di volte, ossia che ha la maggior probabilità di verificarsi.

In corrispondenza a questo valore di x, $f(x)$ ha un massimo. A volte ci sono due o più valori di questo tipo: in tal caso la **distribuzione** si dice **bimodale** o **multimodale**.

Definizione 16
La **mediana** è il valore M per il quale si ha

$$P(X \leq M) = P(X \geq M) = \frac{1}{2}$$

Nel caso di una distribuzione continua, la mediana corrisponde a un punto che separa la regione sottesa dalla curva $f(x)$ in due parti, entrambe di area uguale a $\frac{1}{2}$.

Esempio 37

Sia data la distribuzione (vedere esempio 7)

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2}\right)^x & x = 1,2,3,4,5 \\ \dfrac{1}{32} & x = 6 \end{cases}$$

Calcolare il valor medio, la varianza, la moda e la mediana.

Valor medio (formula (3.9))

$$\mu = 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{1}{16} + 5\cdot\frac{1}{32} + 6\cdot\frac{1}{32} = \frac{63}{32} \cong 1.97$$

Varianza (formula (3.15))

$$\sigma^2 = 1\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{4} + 9\cdot\frac{1}{8} + 16\cdot\frac{1}{16} + 25\cdot\frac{1}{32} + 36\cdot\frac{1}{32} - \left(\frac{63}{32}\right)^2 \cong 1.53$$

Moda (vedere figura 4)

$$\tilde{x} = 1$$

Mediana

$$M = 1.5\ .$$

Infatti

$$P(X \le 1.5) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

$$P(X \ge 1.5) = P(X = 2) + P(X = 3) + \ldots + P(X = 6) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{2}$$

Esempio 38

Trovare il valore della costante $k \in \mathbf{R}$ in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

sia una densità di probabilità.

Calcolare il valor medio μ, la moda $\tilde{x}$ e la mediana M.

1) $f(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad k \geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-2}^{1} kx^2 dx = k\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{1} = k\left(\frac{1}{3} + \frac{8}{3}\right) = 3k$$

$$3k = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{3}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Valor medio

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_{-2}^{1} xf(x)\,dx = \int_{-2}^{1} \frac{1}{3}x^3 dx = \left.\frac{1}{3}\frac{x^4}{4}\right|_{-2}^{1} = -\frac{5}{4} = -1.25$$

Moda

$$\tilde{x} = -2$$

In base alla definizione 16, la mediana è il valore M per il quale si verifica

$$P(X \le M) = \int_{-2}^{M} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-2}^{M} f(x)dx = \int_{-2}^{M} \frac{1}{3} x^2 dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \bigg|_{-2}^{M} = \frac{1}{9}\left(M^3 + 8\right)$$

$$\frac{1}{9}\left(M^3 + 8\right) = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad M = -\sqrt[3]{\frac{7}{2}} \cong -1.52$$

Nella figura 26 l'area ombreggiata vale $\frac{1}{2}$, ed è la metà dell'area totale sottesa da $f(x)$ nell'intervallo $[-2,1]$.

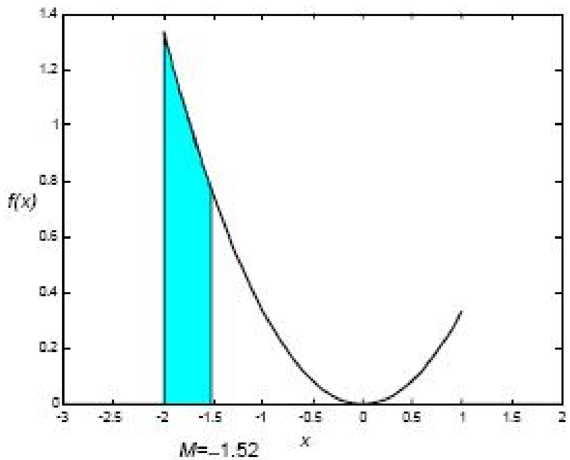


Figura 26

Disuguaglianza di Chebishev

Come già osservato, la varianza (o lo scarto quadratico medio) misura la dispersione di una distribuzione di probabilità.

Se la varianza σ^2 è piccola, c'è un'alta probabilità di ottenere valori della variabile aleatoria vicini al valor medio; se invece σ^2 è grande, c'è una maggior probabilità di ottenere valori lontani dal valor medio.

Queste considerazioni sono formalizzate dal seguente risultato.

Teorema 1 – Disuguaglianza di Chebishev

Sia X una variabile aleatoria con valor medio μ e varianza σ^2; allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$P\left(\left|X-\mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \qquad (3.26)$$

La relazione $\left|X-\mu\right| \geq \varepsilon$ equivale alle disuguaglianze

$$X \leq \mu - \varepsilon \qquad X \geq \mu + \varepsilon,$$

quindi la disuguaglianza di Chebishev afferma che la probabilità che la variabile aleatoria X assuma un valore fuori dall'intervallo $(\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon)$ è minore o uguale a $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$; concludiamo perciò che più è piccola la varianza, minore è la probabilità che X assuma valori fuori dall'intervallo $(\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon)$.

La disuguaglianza di Chebishev viene spesso presentata anche nella seguente forma, che si ottiene dalla (3.26), osservando che l'evento $|X-\mu| \geq \varepsilon$ è il complementare dell'evento $|X-\mu| < \varepsilon$

$$P\left(|X-\mu| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \qquad (3.27)$$

La disuguaglianza di *Tchebychev* è *Free-distribution*

Dal punto di vista teorico la caratteristica più importante della disuguaglianza di Chebishev è che si applica ad ogni distribuzione di probabilità di cui siano noti valor medio e varianza μ e σ^2. Tuttavia questo è anche il suo limite, perché fornisce solo una stima, a volte assai poco precisa, della probabilità di ottenere un valore di X che differisce da μ di una quantità minore o uguale a ε.

Esempio 39

Una variabile aleatoria X ha valor medio $\mu = 3$ e varianza $\sigma^2 = 2$. Mediante la disuguaglianza di Chebishev determinare una maggiorazione per le seguenti probabilità

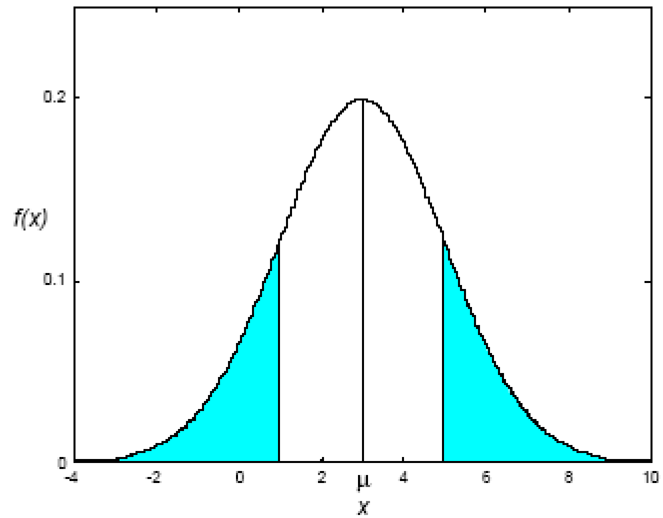
a – $P\left(|X-3| \geq 2\right)$

b – $P\left(|X-3| \geq 1\right)$

c – $P\left(|X-3| \leq 1.5\right)$

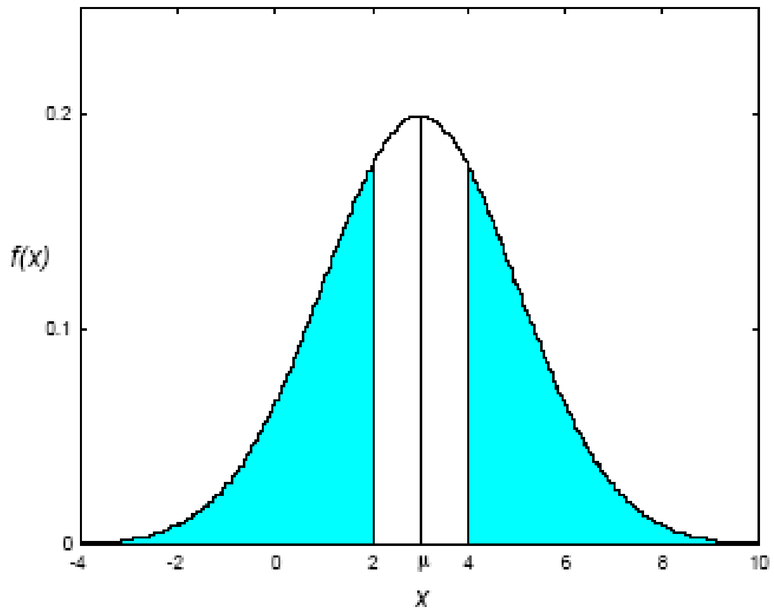
Le tre probabilità che si vogliono stimare sono date dalle aree colorate, rispettivamente nelle figure 27, 28, 29, dove è rappresentata una generica distribuzione di probabilità.
Con la disuguaglianza di Chebishev nella forma (3.26) si ottiene

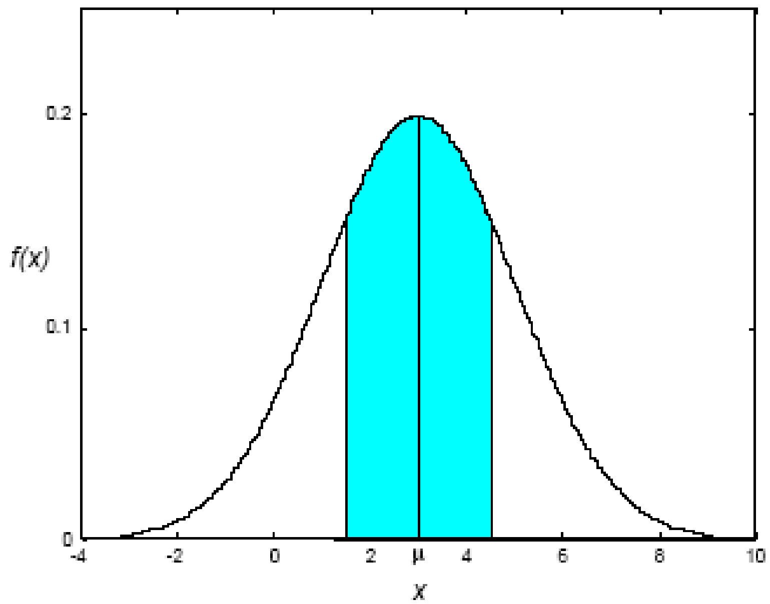
a – $P\left(|X-3| \geq 2\right) \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (figura 27)



b –
$$P\left(\left|X-3\right|\geq 1\right)\leq\frac{2}{1}=2 \quad \text{(figura 28)}$$
Quest'ultima stima è priva di interesse, perché troppo grossolana.

c – Con la disuguaglianza di Chebishev nella forma (3.27) si ottiene
$$P\left(\left|X-3\right|\leq 1.5\right)\geq 1-\frac{2}{1.5^2}=\frac{1}{9} \quad \text{(figura 29)}$$





Esempio 40

Il numero di automobili prodotte da una fabbrica in una settimana è una variabile aleatoria X con valor medio $\mu = 500$ e varianza $\sigma^2 = 100$.

Qual è la probabilità che questa settimana la produzione sia compresa fra 400 e 600 automobili?

Per calcolare la probabilità utilizziamo la disuguaglianza di Chebishev (3.27)

$$\mu = 500 \qquad \sigma^2 = 100$$

$$400 \leq X \leq 600 \Rightarrow |X - \mu| = |X - 500| \leq 100 \Rightarrow \varepsilon = 100$$

$$P(|X - 500| \leq 100) \geq 1 - \frac{100}{100^2} = 0.99$$

Esempio 41

Il numero di clienti che visitano un concessionario di auto al sabato mattina è una variabile aleatoria X con valor medio $\mu = 18$ e deviazione standard $\sigma = 2.5$.

Con quale probabilità si può asserire che il numero di clienti è compreso fra 8 e 28?

Si applica la disuguaglianza di Chebishev (3.27)

$$\mu = 18 \qquad \sigma = 2.5 \qquad 8 \leq X \leq 28 \Rightarrow \varepsilon = 10$$

$$P(|X - 18| \leq 10) \geq 1 - \frac{2.5^2}{10^2} = 0.9375$$

Fare da soli gli esempi 42 e 43 !!