Facoltà di Ingegneria
Università degli Studi di Firenze
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Statistica e Probabilità per l'Ingegneria

- Probabilità - (1^ parte)

2. Probabilità

Ing. Andrea Zanobini
Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni

Esperimenti casuali, spazio dei campioni, eventi

Un insieme S contenente tutti i possibili risultati di un esperimento casuale è detto **spazio campione**; ciascun risultato è un **elemento** o **punto** di S.
Gli spazi campione vengono classificati in base al numero degli elementi che essi contengono.
Lo spazio campione S corrispondente al lancio di un dado contiene 6 elementi

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

e costituisce un esempio di **spazio campione finito**.
Se si considera come evento il numero di volte che un dado deve essere lanciato prima di ottenere un 6, si ha invece uno **spazio campione infinito**: infatti ogni numero intero positivo è un possibile risultato. Il numero degli elementi in questo caso è un'infinità numerabile[1].

Un **evento** è un sottoinsieme $E \subseteq S$ dello spazio campione S, cioè un insieme di risultati possibili.

Esempio 1
Si effettuano due lanci consecutivi di una moneta; lo spazio campione è l'insieme

$$S = \{TT,CC,TC,CT\}.$$

L'evento che si verifica quando si presenta una sola volta T è il sottoinsieme

$$E_1 = \{TC,CT\}.$$

L'evento che si verifica quando si presenta la prima volta T è

$$E_2 = \{TT,TC\}.$$

Esempio 2

Si estrae una carta a caso da un mazzo di 52 carte; descrivere lo spazio campione quando

a – i semi non sono considerati;

b – i semi sono considerati.

Si indica

1 = asso; 11 = fante; 12 = regina; 13 = re;

C = cuori; Q = quadri; P = picche; F = fiori

a – $S = \{1,2,....,9,10,11,12,13\}$

S contiene 13 elementi.

b – $S = \{1Q,2Q,....,10Q,11Q,12Q,13Q,1C,...,13C,1P,...,13P,1F,...,13F\}$

S contiene 52 elementi.

Se il risultato di un esperimento è un elemento di E, si dice che l'evento si è verificato.

Anche l'intero spazio S è un evento: l'**evento** sicuro o **certo**. Ad esempio nel lancio di un dado l'evento certo è che esca uno dei numeri $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Anche l'insieme vuoto $\varnothing$ è un evento: l'**evento impossibile**.

Algebra degli eventi

Usando le **operazioni insiemistiche** sugli eventi di S si possono ottenere nuovi eventi di S.
Se A e B sono eventi di S, allora

1 – **unione**: $A \cup B$ è l'evento "A oppure B o entrambi";

2 – **intersezione**: $A \cap B$ è l'evento "sia A che B";

3 – **complementare**: $\overline{A}$ è l'evento "non A";

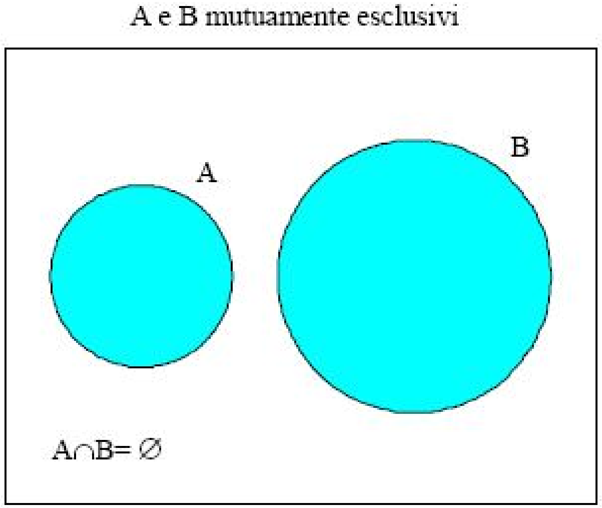
4 – **differenza**: $A - B$ è l'evento "A ma non B".

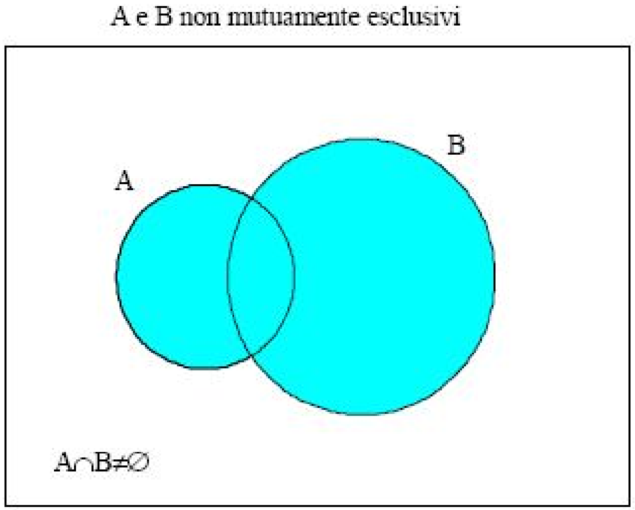
Eventi incompatibili

Definizione 1
Due **eventi** A e B sono **mutuamente esclusivi,** o **incompatibili**, se non possono verificarsi contemporaneamente.

Se gli eventi A e B sono mutuamente esclusivi, essi sono disgiunti, ossia $A \cap B = \emptyset$.

diagrammi di Venn.





Proprietà delle operazioni insiemistiche.

Siano A, B, C sottoinsiemi dello spazio S; valgono le proprietà

1 – $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ — proprietà **commutativa** di $\cup$ e $\cap$

2– $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ — proprietà **associativa** di $\cup$ e $\cap$

3 – $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ — proprietà **distributiva** di $\cup$ rispetto a $\cap$

4 – $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ — proprietà **distributiva** di $\cap$ rispetto a $\cup$

5 – $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{(A \cap B)}$ — **legge di De Morgan**

6 – $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{(A \cup B)}$ — **legge di De Morgan**

Esempi

Esempio 3

Si effettuano due lanci di una moneta.

Spazio campione $S = \{TT, CC, TC, CT\}$.

Evento A = "si presenta almeno una T" $A = \{TT, TC, CT\}$

Evento B = "il risultato del secondo lancio è C" $B = \{CC, TC\}$

$$A \cup B = \{TT, CC, TC, CT\} = S \qquad A \cap B = \{TC\} \neq \varnothing$$

$$\overline{A} = \{CC\} \qquad A - B = \{TT, CT\}$$

Gli eventi A e B non sono mutuamente esclusivi.

Esempio 4

Si effettua un lancio di un dado.

Spazio campione $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Evento A = "uscita di un numero pari" $A = \{2,4,6\}$

Evento B = "uscita di un numero dispari" $B = \{1,3,5\}$

$$A \cup B = S \Rightarrow A \cup B \text{ evento certo}$$

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow A \cap B \text{ evento impossibile}$$

Gli eventi A e B sono mutuamente esclusivi.

Esempi

Esempio 5

Si estrae una carta a caso da un mazzo di 52 carte; siano dati gli eventi

Evento A = "è uscito un re".

Evento B = "è uscita una carta picche".

Gli eventi sottoelencati si descrivono nel modo seguente:

a – Evento $A \cup B$ = "re o picche o entrambi (cioè re di picche)".

b – Evento $A \cap B$ = "re di picche".

c – Evento $A \cup \overline{B}$ = "re o cuori o quadri o fiori" . Infatti

Evento $\overline{B}$ = "non picche" = evento "cuori o quadri o fiori".

d – Evento $\overline{A} \cup \overline{B}$ = "non re di picche" = "ogni carta diversa dal re di picche". Infatti per la legge di De Morgan (proprietà 5 pag. 60)

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{(A \cap B)}$$

e, servendosi del risultato b, $\overline{(A \cap B)}$ = "non re di picche".

e – Evento $A - B$ = "un re, ma non di picche".

Calcolo Combinatorio

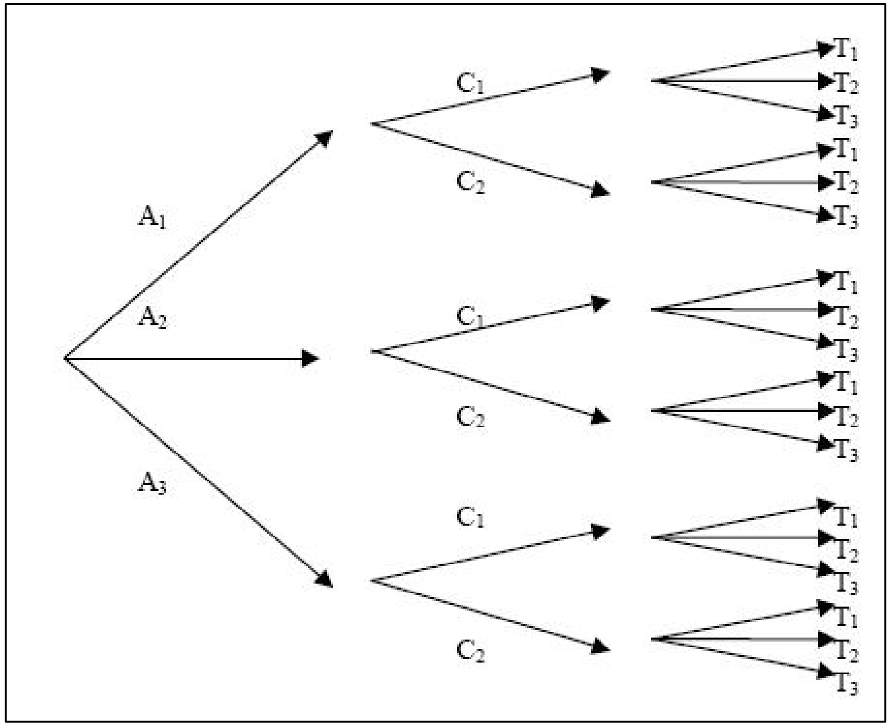
A volte può essere difficile, o almeno noioso, determinare per elencazione diretta gli elementi in uno spazio campione finito. E' preferibile avere dei metodi per contare il numero di tali elementi senza elencarli. Il **calcolo combinatorio** fornisce dei metodi per calcolare il numero di elementi di un insieme. Per illustrare il problema si consideri il seguente esempio.

Esempio 6

Se un uomo ha 3 abiti, 2 camicie e 3 cravatte, quanti modi ha per scegliere una giacca, poi una camicia e infine una cravatta?

Per trattare problemi di questo tipo è utile disegnare un **diagramma ad albero**, dove le alternative per l'abito sono indicate con A_1, A_2, A_3 , per la camicia con C_1, C_2 e per la cravatta con T_1, T_2, T_3

Diagramma ad albero



Teorema 1

Se gli insiemi $A_1, A_2, ..., A_k$ contengono rispettivamente $n_1, n_2, ..., n_k$ oggetti, il numero di modi diversi di scegliere prima un oggetto di A_1, poi un oggetto di $A_2, \ldots$, infine un oggetto di A_k è

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k \qquad (2.1)$$

Esempi

Esempio 7

In quanti modi diversi una commissione di 25 persone può scegliere un presidente e un vicepresidente?

Il presidente può essere scelto in 25 modi diversi, quindi il vicepresidente in 24 modi diversi; ci sono in tutto

$$N = 25 \cdot 24 = 600$$

modi diversi in cui la scelta richiesta può essere fatta.

Esempio 8

Se un test consiste di 12 domande con risposta Vero-Falso, in quanti modi diversi uno studente può svolgere l'intero test con una risposta per ciascuna domanda?

Poiché a ogni domanda si può rispondere in 2 modi, le possibilità sono in numero di

$$N = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots\ldots \cdot 2}_{12 \text{ fattori}} = 2^{12} = 4096 \,.$$

Se in particolare $n_1 = n_2 = \ldots. = n_k = n$, si ha $N = n^k$, che rappresenta il numero delle disposizioni con ripetizione di n oggetti a gruppi di k, ossia dei gruppi che si possono formare scegliendo k oggetti, anche ripetibili, fra n oggetti disponibili.

Disposizioni con ripetizione

Teorema 2
Il numero di **disposizioni con ripetizione di n oggetti a gruppi di k** è dato da

$$D_{n,k}^{(r)} = n^k \tag{2.2}$$

Esempi

Esempio 9
Quante parole di 3 lettere (anche senza significato) si possono scrivere con l'alfabeto di 21 lettere?

Le parole sono

aaa, aab, aac, ….. , zzz

Il loro numero è

$$\mathrm{D}_{21,3}^{(r)} = 21^3 = 9261$$

Esempio 10
Nella schedina del totocalcio tutti i possibili pronostici sono dati dalle disposizioni con ripetizione dei 3 elementi 1 2 X a gruppi di 13 (i tre simboli si possono ripetere); il loro numero è

$$\mathrm{D}_{3,13}^{(r)} = 3^{13} = 1594323$$

Disposizioni senza ripetizione

Definizione 2
Dati n oggetti distinti, si chiamano **disposizioni semplici (senza ripetizione)** i gruppi che si possono formare scegliendo k $(k \le n)$ degli n oggetti; i gruppi devono differire o per qualche oggetto o per l'ordine in cui sono disposti.

Teorema 3
Il numero delle **disposizioni semplici (senza ripetizione)** di k oggetti scelti da un insieme di n oggetti distinti è dato da

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (2.4)$$

Esempi

Esempio 11
Quante parole di 3 lettere diverse si possono formare con l'alfabeto di 21 lettere?

Sono le disposizioni semplici di 21 oggetti diversi a gruppi di 3

$$D_{21,3} = \frac{21!}{18!} = 19 \cdot 20 \cdot 21 = 7980 \ .$$

Esempio 12
In quanti modi 10 persone possono sedersi su una panchina che ha solo 4 posti?

Il numero dei modi è dato dalle disposizioni semplici di 10 elementi a gruppi di 4

$$D_{10,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

Esempio 13
In una gara con 40 concorrenti, quante sono le possibili classifiche dei primi tre?

Per il 1° posto possiamo scegliere tra 40 possibilità; per il 2° posto possiamo scegliere fra 39 possibilità e per il 3° posto fra 38 possibilità. In tutto quindi le classifiche possibili per i primi tre sono

$$D_{40,3} = 40 \cdot 39 \cdot 38 = 59280$$

Fare da soli l'esempio 14 !!

Permutazioni

Definizione 3
Le **permutazioni** di n oggetti distinti sono tutti i gruppi formati ciascuno da tutti gli n oggetti dati e che differiscono solo per l'ordine degli oggetti.

Ponendo $k = n$ nella formula delle disposizioni semplici si ottiene il seguente risultato.

Teorema 4
Il numero delle **permutazioni di n oggetti distinti** è dato da

$$P_n = n! \tag{2.5}$$

Esempi

Esempio 15
Quante parole si possono formare con le 5 vocali?

Il numero delle parole è dato dalle permutazioni di 5 elementi

$$P_5 = 5! = 120.$$

Esempi

Esempio 17

Si fanno sedere 5 uomini e 4 donne in fila: in quanti modi le donne possono occupare i posti pari?

Gli uomini possono essere sistemati in $5!$ modi diversi (permutazioni), le donne in $4!$ modi diversi.

Ciascuna sistemazione degli uomini può essere associata ad ogni sistemazione delle donne, quindi il numero complessivo di sistemazioni è

$$N = 5! \cdot 4! = 2880 .$$

Esempio 18

Gli **anagrammi**, cioè le parole che si ottengono da una parola qualunque cambiando solo il posto delle sue lettere, sono permutazioni.

Consideriamo dapprima il caso in cui le parole sono formate da lettere tutte diverse: ad esempio gli anagrammi della parola ROMA sono

$$P_4 = 4\,! = 24$$

Fare da soli l'esempio 16 !!

Permutazioni di *n* oggetti non tutti distinti

Teorema 5
Il numero delle **permutazioni di *n* oggetti non tutti distinti** è dato da

$$P_{n,n_1,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} \tag{2.6}$$

Esempi

Esempio 19
Contare gli anagrammi della parola MATEMATICA.

Ci sono 10 lettere di cui 2 M, 3 A, 2 T; gli anagrammi sono in numero di

$$N = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = 151200 .$$

Fare da soli l'esempio 20 !!

Combinazioni

In una disposizione semplice siamo interessati all'ordine degli oggetti, quindi ad esempio il gruppo "abc" è un gruppo diverso da "bca"; se invece l'ordine di scelta non interessa, cioè "abc" e "bca" sono lo stesso gruppo, si ottengono le **combinazioni**.

Definizione 4
Le **combinazioni** sono tutti i gruppi di k oggetti, che si possono formare da un insieme di n oggetti distinti, in modo che i gruppi differiscano per almeno un oggetto.

Teorema 6
Il numero delle **combinazioni** di n oggetti a gruppi di k è dato da

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{2.7}$$

I numeri

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

sono chiamati **coefficienti binomiali**, perché compaiono nello sviluppo della potenza del binomio di Newton $(a+b)^n$.

Esempi

Esempio 21

Quante squadre di calcio si possono formare con 30 giocatori?

Il numero è dato dalle combinazioni di 11 giocatori scelti nell'insieme di 30

$$C_{30,11} = \binom{30}{11} = \frac{30!}{11! \cdot 19!} = 54627300$$

Esempio 23

Gioco del poker.

In una mano di poker ogni giocatore riceve 5 delle 52 carte del mazzo. In quanti modi può essere servito?

Il numero dei servizi possibili è dato dalle combinazioni di 5 oggetti scelti fra 52

$$C_{52,5} = \binom{52}{5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2598960$$

Fare da soli l'esempio 22, 23b, 24, 25, 26 !!

La probabilità

Ci sono più modi mediante i quali è possibile definire la probabilità di un evento: qui definiremo la **probabilità a priori** o **probabilità matematica** e la **probabilità a posteriori** o **probabilità statistica** (o **frequentistica**); è possibile dare un'ulteriore definizione di probabilità, detta **probabilità soggettiva**, che non sarà trattata in queste lezioni.

Probabilità matematica

La definizione classica di **probabilità matematica** P, dovuta a Bernoulli e Laplace, è

$$P = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$$

Questa definizione assume che tutti i risultati possibili di un esperimento siano ugualmente probabili e che lo spazio dei campioni sia finito.

Secondo questa definizione, ogni probabilità P è un numero compreso fra 0 e 1.
Se $P = 0$ si ha il caso impossibile; se $P = 1$ il caso certo.
Talvolta la probabilità P viene moltiplicata per 100 ed espressa in percentuale

$$0\ \% \le P \le 100\ \%.$$

Esempi

Esempio 27

Si effettua un lancio di un dado. Calcolare

a – la probabilità di ottenere 2;

b – la probabilità di ottenere un numero dispari.

I casi possibili sono 6 e sono gli elementi dell'insieme $\{1,2,3,4,5,6\}$.

a – I casi favorevoli si riducono a 1 (i casi possibili si escludono a vicenda perché può apparire una sola faccia). Pertanto la probabilità cercata è $P = \frac{1}{6}$.

b – I casi favorevoli sono 3. La probabilità cercata è $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Esempio 28

Si effettuano due lanci di una moneta. Calcolare la probabilità che si presenti T (testa) almeno una volta.

Casi possibili	TT	TC	CT	CC
Casi favorevoli	TT	TC	CT	

La probabilità cercata è $P = \frac{3}{4}$.

Esempi

Esempio 29

Si estrae una carta da un mazzo di 52 carte. Calcolare

a – la probabilità di estrarre un asso;

b – la probabilità di estrarre un asso oppure un 10 di cuori oppure un 2 di picche.

a – Nel mazzo ci sono 4 assi, quindi 4 casi favorevoli; la probabilità cercata è $P = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

b – Nel mazzo ci sono 4 assi, un 10 di cuori e un 2 di picche, quindi 6 casi favorevoli; la probabilità cercata è $P = \frac{6}{52}$.

Fare da soli gli esempi da 30 a 34 !!

(con l'utilizzo del calcolo combinatorio)

Probabilità a posteriori - (statistica o frequentistica)

Se, dopo aver ripetuto n volte un esperimento, con n sufficientemente grande, un evento si è verificato h volte, si dice che la probabilità di questo evento è $P = \frac{h}{n}$.
Affinché questa definizione sia valida, occorre che tutte le prove avvengano nelle stesse condizioni, cosa che in realtà non è sempre ottenibile quando si analizzano fenomeni statistici.

...per chiarire

Se si afferma ad esempio che la probabilità di una nascita di gemelli è $P = \frac{1}{100}$, si intende che la frequenza relativa osservata nell'arco di alcuni anni è stata di 1 su 100; da tale constatazione si può assumere che una nascita futura sarà una nascita di gemelli con probabilità P uguale a tale frequenza.

Importante!!

Sia l'approccio classico, sia quello statistico o frequentistico vanno incontro a difficoltà: il primo a causa dell'espressione "ugualmente probabile", il secondo per aver presupposto "n molto grande", concetti di palese vaghezza. A causa di queste difficoltà, si preferisce l'approccio assiomatico alla probabilità, che fa uso degli insiemi.

Definizione Assiomatica di Probabilità

Sia S uno spazio campione finito. Ad ogni evento A di S si associa un numero reale $P(\mathrm{A})$, detto **probabilità dell'evento A**, che soddisfa i seguenti assiomi

1 − $0 \leq P(\mathrm{A}) \leq 1$

2 − $P(\mathrm{S}) = 1$

3 − Se A e B sono eventi mutuamente esclusivi di S (cioè $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$), allora

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}).$$

Funzione di Probabilità

P è una funzione definita sull'insieme degli eventi di S e a valori reali, detta **funzione di probabilità**

$$P : \mathrm{S} \rightarrow \mathbf{R}.$$

Dal 1° assioma segue che $P(\mathrm{A})$ è un numero reale appartenente all'intervallo [0,1]; dal 2° assioma segue che la probabilità dell'evento certo è 1; dal 3° assioma segue che le funzioni di probabilità sono funzioni additive.

Gli assiomi non devono naturalmente essere dimostrati, ma si può mostrare che essi sono coerenti con la definizione classica di probabilità.

Esempio 37

Un esperimento ha tre possibili risultati a, b, e c; in ciascuno dei casi seguenti verificare se i valori assegnati alle probabilità sono accettabili

1 – $P(\mathrm{a}) = \frac{1}{3}$, $P(\mathrm{b}) = \frac{1}{3}$, $P(\mathrm{c}) = \frac{1}{3}$

2 – $P(\mathrm{a}) = 0.64$, $P(\mathrm{b}) = 0.38$, $P(\mathrm{c}) = -0.02$

3 – $P(\mathrm{a}) = 0.35$, $P(\mathrm{b}) = 0.52$, $P(\mathrm{c}) = 0.26$

1 – I valori assegnati alle probabilità sono accettabili, perché sono compresi nell'intervallo [0,1] e la loro somma vale 1.

2 – Il valore di $P(\mathrm{c}) = -0.02$ non è accettabile perché negativo.

3 – I valori non sono accettabili perché la loro somma è $0.35+0.52+0.26 = 1.13 > 1$.

- Teoremi -

Teorema 7

Se $A_1, A_2, ..., A_n$ sono eventi mutuamente esclusivi di uno spazio campione S, allora

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) \tag{2.8}$$

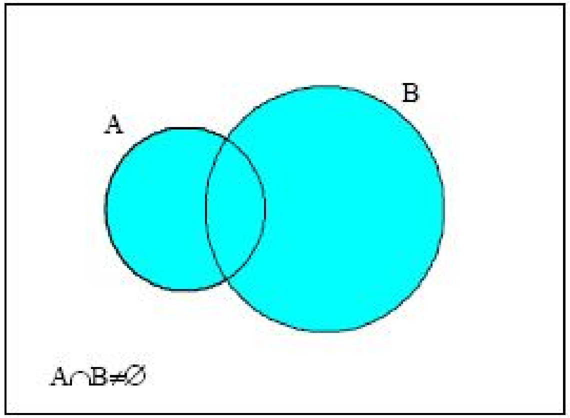
Teorema 8 – Regola additiva

Se A e B sono due eventi qualsiasi di S, allora

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{2.9}$$

Rappresentazione grafica con i diagrammi di Venn

A e B non mutuamente esclusivi



Dal grafico si vede che, sommando semplicemente P(A) e P(B), la probabilità P (A ∩ B) viene contata due volte. Se gli eventi sono mutuamente esclusivi, il teorema 8 si riduce al terzo assioma della definizione.

Teorema 9
Se A è un qualunque evento di S, allora

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{2.10}$$

In particolare l'evento impossibile ha probabilità nulla

$$P(\emptyset) = 0.$$

Esempio (fare da soli il 38)

Esempio 39

Una pallina viene estratta da un'urna che ne contiene 6 rosse, 4 bianche e 5 nere. Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia

a – rossa;

b – bianca;

c – nera;

d – non rossa;

e – rossa o bianca.

a – Casi possibili: $6+4+5=15$ Casi favorevoli: 6

$$P(\text{rossa}) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

b – $$P(\text{bianca}) = \frac{4}{15}$$

c – $$P(\text{nera}) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

d – $$P(\text{non rossa}) = 1 - P(\text{rossa}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

e – $$P(\text{rossa} \cup \text{bianca}) = P(\text{rossa}) + P(\text{bianca}) = \frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

(rossa e bianca sono eventi mutuamente esclusivi)

Esempio 41

Due dadi hanno le facce numerate nel modo seguente

1 1 2 2 2 3

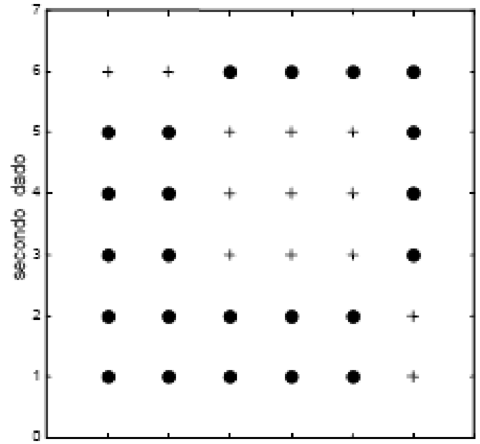
Trovare la probabilità che il punteggio totale sia

a – uguale a 4;

b – minore di 4;

c – maggiore di 4.

Esempio (fare da soli il 40)



$+$ = somma 4

Figura 5

a – Casi possibili: 36. Casi favorevoli: 13.

La probabilità che il punteggio totale sia uguale a 4 è $P = \frac{13}{36}$.

b – Casi possibili: 36. Casi favorevoli: 16.

La probabilità che il punteggio totale sia minore di 4 è $P = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

c – La probabilità che il punteggio totale sia minore o uguale a 4 è $P = \frac{13}{36} + \frac{4}{9} = \frac{29}{36}$, quindi la probabilità che il punteggio sia maggiore di 4 è $P = 1 - \frac{29}{36} = \frac{7}{36}$.

Esempio 42

Si effettua il lancio di un dado. Calcolare

a – la probabilità che esca un 2 oppure un 5;

b – la probabilità che esca un numero pari;

c – la probabilità che esca un numero divisibile per 3.

d – Dati gli eventi

Evento A_1 = "esce 1 oppure 2" $A_1 = \{1,2\}$

Evento A_2 = "esce 2 oppure 3" $A_2 = \{2,3\}$

calcolare $P(A_1 \cup A_2)$.

a – Si ha

$$P(1) = P(2) = ... = P(6) = \frac{1}{6}$$

L'evento che si verifica quando esce un 2 o un 5 si indica con $2 \cup 5$

$$P(2 \cup 5) = P(2) + P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

b – $$P(2 \cup 4 \cup 6) = P(2) + P(4) + P(6) = \frac{1}{2}$$

c – $$P(3 \cup 6) = P(3) + P(6) = \frac{1}{3}$$

Esempio

d – Gli eventi $A_1 = \{1,2\}$ e $A_2 = \{2,3\}$ non sono mutuamente esclusivi, poiché

$$A_1 \cap A_2 = \{2\} \neq \emptyset .$$

Si ha

$$A_1 \cup A_2 = \{1,2,3\}$$

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} .$$

Esempio 43

Si estrae una carta a caso da un mazzo di 52 carte. Calcolare la probabilità che sia

a – un asso;

b – un fante di cuori;

c – un 3 di picche o un 6 di fiori;

d – un cuori;

e – un seme diverso da cuori;

f – un 10 o un quadri;

g – né un 4 né un picche.

Si usano le notazioni

1 = asso, ... , 11 = fante, 12 = regina, 13 = re,
C = cuori, Q = quadri, P = picche, F = fiori.

a – $P(1) = \frac{4}{52}$

b – $P(11 \cap \mathrm{C}) = \frac{1}{52}$

c – $P((13 \cap \mathrm{P}) \cup (6 \cap \mathrm{F})) = P(13 \cap \mathrm{P}) + P(6 \cap \mathrm{F}) = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{1}{26}$

d – $P(\mathrm{C}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

e – $P(\overline{\mathrm{F}}) = 1 - P(\mathrm{F}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

f – 10 e quadri non sono mutuamente esclusivi, quindi

$$P(10 \cup \mathrm{Q}) = P(10) + P(\mathrm{Q}) - P(10 \cap \mathrm{Q}) = \frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$$

g – $P(\text{né 4 né picche}) = P(\overline{4} \cap \overline{\mathrm{P}})$

Per la legge di De Morgan (proprietà 6, pag. 60) si ha

$$P(\overline{4} \cap \overline{\mathrm{P}}) = P(\overline{(4 \cup \mathrm{P})}) = 1 - P(4 \cup \mathrm{P}) =$$

$$= 1 - \left[P(4) + P(\mathrm{P}) - P(4 \cap \mathrm{P})\right] = 1 - \left[\frac{1}{13} + \frac{1}{4} - \frac{1}{52}\right] = \frac{9}{13}$$

(si ricordi che gli eventi 4 e P non sono mutuamente esclusivi).

Esempio 44

Supponiamo che i pezzi prodotti da una certa macchina possano avere due tipi di difetti. E' noto che la probabilità che un pezzo presenti il primo difetto è 0.1, la probabilità che non presenti il secondo difetto è 0.8, la probabilità che li presenti entrambi è 0.01.

Calcolare la probabilità che un pezzo non abbia alcun difetto.

Evento A = "è presente il primo difetto"

Evento B = "è presente il secondo difetto".

Dai dati del problema si ha

$$P(\mathrm{A}) = 0.1 \qquad P(\overline{\mathrm{B}}) = 0.8 \qquad P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0.01$$

Si deve calcolare $P(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}})$.

$$P(\overline{\mathrm{A}}) = 0.9 \qquad P(\mathrm{B}) = 0.2$$

Applicando la regola additiva (teorema 8) si ha

$$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0.1 + 0.2 - 0.01 = 0.29$$

Per la legge di De Morgan (proprietà 6, pag. 560) si ha

$$P(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}) = 1 - P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 1 - 0.29 = 0.71 \,.$$

Fare da soli l'esempio 45 e quello 48 !!

Probabilità Condizionata

La probabilità di un evento è un numero che misura il grado di fiducia che noi abbiamo circa il realizzarsi di questo evento. E' naturale allora che la probabilità di uno stesso evento possa cambiare, se cambiano le informazioni in nostro possesso.

Definizione 5

Siano A e B due eventi qualsiasi dello spazio campione S e sia $P(\mathrm{A}) \neq 0$.

La probabilità dell'evento B, nell'ipotesi che si sia già verificato l'evento A, è chiamata **probabilità** di B **condizionata** ad A ed è definita da

$$P(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})} \tag{2.11}$$

Analogamente, se $P(\mathrm{B}) \neq 0$, la probabilità di A condizionata a B è definita da

$$P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{B})} \tag{2.12}$$

Teorema 10 – Regola di moltiplicazione

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) \qquad \text{se } P(\mathrm{A}) \neq 0 \tag{2.13}$$

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) \qquad \text{se } P(\mathrm{B}) \neq 0 \tag{2.14}$$

Esempio 47

Data un'urna contenente 15 palline rosse e 5 palline nere, indichiamo con A l'evento "estrazione di pallina rossa" e con B l'evento "estrazione di pallina nera". Calcoliamo la probabilità di ottenere in due estrazioni consecutive prima una pallina rossa e poi una nera, nell'ipotesi che la prima pallina estratta non venga rimessa nell'urna.

La probabilità di estrarre una pallina rossa alla prima estrazione è

$$P(\mathrm{A}) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

La probabilità di estrarre una pallina nera dopo aver già estratto una pallina rossa, che non viene rimessa nell'urna prima di effettuare la seconda estrazione, è $\frac{5}{19}$. Infatti ci sono soltanto più 19 palline nell'urna fra le quali estrarre la seconda. Pertanto la probabilità condizionata vale

$$P(\mathrm{B}\,|\,\mathrm{A}) = \frac{5}{19}$$

La probabilità $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ di ottenere in due estrazioni consecutive una pallina rossa e poi una nera, senza rimettere nell'urna la rossa già estratta, in base alla (2.13) è

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B}\,|\,\mathrm{A}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{19} = \frac{15}{76} = 0.1974\,.$$

Se invece la prima pallina estratta venisse rimessa nell'urna, la probabilità di ottenere in due estrazioni consecutive prima una pallina rossa e poi una nera sarebbe

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \frac{15}{20} \cdot \frac{5}{20} = \frac{3}{16} = 0.1875\,.$$

Eventi Indipendenti

Definizione 6
Due **eventi** A e B si dicono **indipendenti** se

$$P(\mathrm{B} \mid \mathrm{A}) = P(\mathrm{B})$$

In tal caso si ha pure

$$P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}) = P(\mathrm{A})$$

Teorema 11 – Regola di moltiplicazione per eventi indipendenti
Se due eventi A e B sono indipendenti, si ha

$$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B}) \qquad (2.15)$$

Questa regola viene spesso assunta come definizione di eventi indipendenti; in ogni caso può essere usata per determinare se due eventi sono indipendenti.

Esempio 49
Qual è la probabilità di ottenere due volte testa in due lanci successivi di una moneta?

Poiché la probabilità di ottenere T è $P(\mathrm{T}) = \frac{1}{2}$ per ciascun lancio e i due lanci sono indipendenti, la probabilità di ottenere due volte testa è

$$P(\mathrm{TT}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Esempio 50
Si lancia due volte un dado. Calcolare la probabilità di ottenere 4, 5 o 6 al primo lancio e 1, 2, 3 o 4 al secondo.

Siano

$$A = \{4,5,6\} \qquad B = \{1,2,3,4\}$$

Si deve calcolare la probabilità $P(A \cap B)$.
Il risultato del secondo lancio è indipendente dal primo, cioè i due eventi A e B sono indipendenti, perciò

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{3} .$$

Esempio 51
Trovare la probabilità che in due lanci di un dado si presenti almeno una volta il 5.

Evento A = "5 al primo lancio"
Evento B = "5 al secondo lancio"
Evento $A \cup B$ = " 5 al primo oppure al secondo lancio" .
Gli eventi non sono mutuamente esclusivi, perciò per il teorema 8 si ha

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Per calcolare $P(A \cap B)$ osserviamo che gli eventi A e B sono indipendenti, perciò

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

quindi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$$

Esempio 53

Si estraggono due carte da un mazzo di 52 carte. Calcolare la probabilità di estrarre due assi se

a – la prima carta viene rimessa nel mazzo prima della seconda estrazione;

b – la prima carta non viene rimessa nel mazzo prima della seconda estrazione.

a – In questo caso gli eventi sono indipendenti; ci sono 4 assi nel mazzo, quindi

$$P = \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$

b – In questo caso gli eventi sono dipendenti; fra le 51 carte rimaste dopo l'estrazione del primo asso ci sono solo più 3 assi, quindi la probabilità di estrarre uno di questi è $\frac{3}{51}$; la probabilità richiesta è

$$P = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{221}$$

Fare da soli l'esempio 52, 54 e 55 !!

Esempio 56

Data la tabella

	P(A)	P(B)	P(A∪B)
caso 1	0.1	0.9	0.91
caso 2	0.4	0.6	0.76
caso 3	0.5	0.3	0.73

esaminare in quali casi gli eventi sono indipendenti.

Ricordando che (teorema 8)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

si ottiene

	P(A∩B)	P(A)·P(B)	indipendenza
caso 1	0.0.9	0.09	sì
caso 2	0.24	0.24	sì
caso 3	0.07	0.15	no

Esempio 57

Si effettuano due lanci di un dado. Sia

Evento A = “primo lancio pari”

Evento B = “secondo lancio ≤ 2”.

Stabilire se gli eventi A e B sono indipendenti.

Lo spazio campione S ha 36 elementi, che sono le seguenti coppie

$$S = \{(1,1),(1,2),\ldots(1,6),(2,1),\ldots(5,6),(6,6)\}.$$

$$A = \{2,4,6\} \qquad B = \{1,2\}$$

A e B sono indipendenti: infatti

$$P(\mathrm{A}) = \frac{3}{6} \qquad\qquad P(\mathrm{B}) = \frac{2}{6}$$

$$\mathrm{A}\cap\mathrm{B} = \{(2,1),(2,2),(4,1),(4,2),(6,1),(6,2)\}$$

$$P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B})$$

Fare da soli l’esempio 58 !!

Esempio 59
Un dado è lanciato quattro volte. Calcolare la probabilità di ottenere almeno un 6 in quattro lanci.

Evento A = “almeno un 6 in 4 lanci”
Evento $\overline{A}$ = “nessun 6 in quattro lanci”.

La probabilità di non ottenere 6 in un singolo lancio è $\frac{5}{6}$, quindi la probabilità di non ottenere nessun 6 in quattro lanci (eventi indipendenti) è

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 .$$

Pertanto

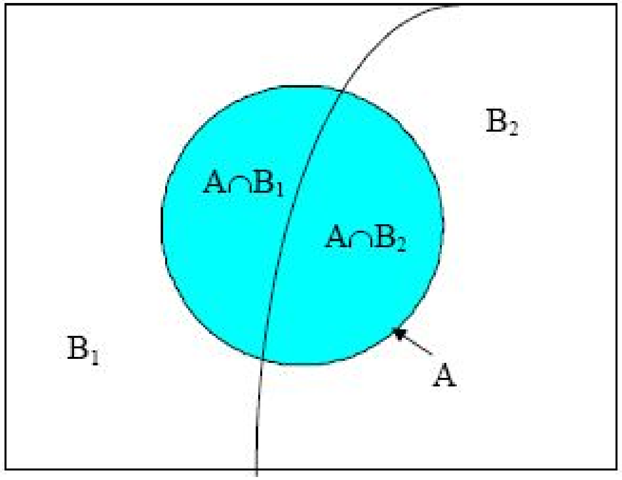
$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 0.518 .$$

Si osservi che **eventi mutuamente esclusivi,** (ossia **disgiunti**), **non sono indipendenti.**
Infatti per ogni coppia di eventi disgiunti A e B si ha $A \cap B = \varnothing$; se A e B fossero indipendenti dovrebbe essere

$$P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0 = P(A) \cdot P(B)$$

quindi almeno uno dei due eventi dovrebbe avere probabilità 0, cioè essere impossibile.
In realtà due eventi disgiunti sono fortemente dipendenti, perché disgiunti significa che se uno si realizza, allora l’altro non si può realizzare.

Il teorema della probabilità totale



Gli eventi B_1 e B_2 sono tali che

$$B_1 \cap B_2 = \varnothing \qquad \text{e} \qquad B_1 \cup B_2 = S$$

dove S è lo spazio campione. Gli insiemi $A \cap B_1$ e $A \cap B_2$ sono mutuamente esclusivi, perciò

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2).$$

Applicando la regola di moltiplicazione (2.14) si ottiene

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A \mid B_1) + P(B_2) \cdot P(A \mid B_2).$$

Questa formula esprime la regola della probabilità totale nel caso particolare di due eventi B_1 e B_2.

Il teorema della probabilità totale generalizzato

Teorema 12 – Teorema della probabilità totale

Sia A un evento e $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ una famiglia di eventi dello spazio campione S mutuamente esclusivi e tali che uno e uno solo di essi si verifichi, ossia tali che

$$B_i \cap B_j = \varnothing \qquad \text{per} \quad i \neq j \qquad \text{(mutuamente esclusivi)}$$

$$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = S \qquad \text{(esaustivi)}$$

$$P(B_i) \neq 0 \qquad \text{per ogni } i$$

Allora si dimostra che

$$P(A) = P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A \mid B_n) \cdot P(B_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) \cdot P(B_i) \tag{2.16}$$

L'utilità del teorema sta nel fatto che talvolta $P(A)$ è difficile da calcolare direttamente, mentre è più facile calcolare le probabilità $P(A \mid B_i)$ e poi ricostruire $P(A)$ dalla formula (2.16).

Esempio 60

Siano date due urne che contengono rispettivamente

urna I 2 palline rosse e 1 nera

urna II 3 palline rosse e 2 nere.

Scegliamo a caso un'urna ed estraiamo a caso una pallina dall'urna scelta. Qual è la probabilità di estrarre una pallina nera?

Evento B_1 = "è stata scelta l'urna I"

Evento B_2 = "è stata scelta l'urna II"

$$B_1 \cap B_2 = \varnothing \qquad B_1 \cup B_2 = S$$

Evento A = "è stata estratta una pallina nera "

Applicando il teorema della probabilità totale si ha

$$P(A) = P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) + P(A \mid B_2) \cdot P(B_2)$$

Si ha

$$P(B_1) = \frac{1}{2} \qquad P(B_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \mid B_1) = \frac{1}{3} \qquad P(A \mid B_2) = \frac{2}{5}$$

quindi

$$P(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{30} \cong 0.367 .$$

Il teorema di Bayes

Esempio 61
Riferendoci all'esempio 60 possiamo ora porre il seguente quesito: se è stata estratta una pallina nera, qual è la probabilità di aver scelto l'urna I?

Per rispondere a questa domanda bisogna calcolare la probabilità $P(\mathrm{B}_1 \mid \mathrm{A})$.
Dal teorema 10 si ricava la relazione

$$P(\mathrm{B}_1 \mid \mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}_1) \cdot P(\mathrm{B}_1)$$

da cui segue

$$P(\mathrm{B}_1 \mid \mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}_1) \cdot P(\mathrm{B}_1)}{P(\mathrm{A})} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{11}{30}} = \frac{5}{11} \cong 0.455 \,.$$

Generalizzando il procedimento seguito nell'esempio 61 si può ottenere il seguente importante risultato.

Teorema 13 – Teorema di Bayes
Sia A un evento con $P(\mathrm{A}) > 0$ e $\{\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_n\}$ una famiglia di eventi dello spazio campione S soddisfacenti le ipotesi del teorema precedente.
Allora

$$P(\mathrm{B}_k \mid \mathrm{A}) = \frac{P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}_k) \cdot P(\mathrm{B}_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(\mathrm{A} \mid \mathrm{B}_i) \cdot P(\mathrm{B}_i)} \qquad \text{per ogni } k \tag{2.17}$$

Esempi (fare da soli il 63, 64, 66, 67)

Esempio 62

Siano date due urne contenenti delle palline bianche e nere; nell'urna I il 70% delle palline sono nere; nell'urna II il 40% delle palline sono nere.

La probabilità di scegliere l'urna I sia 0.1; la probabilità di scegliere l'urna II sia invece 0.9. Calcolare la probabilità che una pallina nera estratta a caso provenga dall'urna I.

Evento A = "pallina estratta nera";

Evento B_1 = "la pallina proviene dall'urna I";

Evento B_2 = "la pallina proviene dall'urna II".

$$P(B_1) = 0.1 \qquad P(B_2) = 0.9$$

$$P(A|B_1) = 0.7 \qquad P(A|B_2) = 0.4$$

Dal teorema di Bayes segue

$$P(\text{dall'urna I} \mid \text{nera}) = P(B_1 \mid A) =$$

$$= \frac{P(B_1)\cdot P(A \mid B_1)}{P(B_1)\cdot P(A \mid B_1) + P(B_2)\cdot P(A \mid B_2)} = \frac{0.1\cdot 0.7}{0.1\cdot 0.7 + 0.9\cdot 0.4} = 0.163 = 16.3\%$$

Il risultato può essere interpretato come segue: effettuando numerose prove, nel 16.3% dei casi in cui si è estratta una pallina nera, essa proviene dall'urna I.

Esempio 65

Quattro tecnici si occupano delle riparazioni dei guasti che accadono in una linea automatica di produzione.

Il primo tecnico effettua il 20% delle riparazioni e in un caso su 20 non esegue correttamente il lavoro; il secondo tecnico effettua il 60% delle riparazioni e in un caso su 10 non esegue correttamente il lavoro; il terzo tecnico effettua il 15% delle riparazioni e in un caso su 10 non esegue correttamente il lavoro; il quarto tecnico effettua il 5% delle riparazioni e in un caso su 20 non esegue correttamente il lavoro.

Il successivo guasto viene ritenuto una conseguenza della precedente riparazione imperfetta; qual è la probabilità che la precedente riparazione sia stata fatta dal primo tecnico?

Evento B_1 = "riparazione eseguita dal 1° tecnico" $P(B_1) = 0.20$ $P(A \mid B_1) = 0.05$

Evento B_2 = "riparazione eseguita dal 2° tecnico" $P(B_2) = 0.60$ $P(A \mid B_2) = 0.10$

Evento B_3 = "riparazione eseguita dal 3° tecnico" $P(B_3) = 0.15$ $P(A \mid B_3) = 0.10$

Evento B_4 = "riparazione eseguita dal 4° tecnico" $P(B_4) = 0.05$ $P(A \mid B_4) = 0.05$

Applicando il teorema di Bayes si trova

$$P(B_1 \mid A) = \frac{(0.20)(0.05)}{(0.20)(0.05) + (0.60)(0.10) + (0.15)(0.10) + (0.05)(0.05)} = 0.114 .$$

E' interessante notare che, sebbene il primo tecnico svolga un lavoro imperfetto solo nel 5% dei casi, tuttavia più dell'11% delle riparazioni non perfette sono una sua responsabilità.

Applicazione del Teorema di Bayes in ambito sanitario

In un test clinico, un individuo viene sottoposto ad un certo esame di laboratorio, per stabilire se ha o non ha una data malattia. Il test può avere esito positivo (il che indica la presenza della malattia) o negativo (il che indica che l'individuo è sano). C'è però sempre una possibilità di errore: può darsi che qualcuno degli individui risultati positivi siano in realtà sani ("**falsi positivi**"), e che qualcuno degli individui risultati negativi siano in realtà malati ("**falsi negativi**").

Evento M = "l'individuo è malato"
Evento S = "l'individuo è sano"
Evento Pos = "il test è positivo"
Evento Neg = "il test è negativo".

Definizione 7
La probabilità condizionata $P(\mathbf{Pos}|\mathbf{M})$ viene detta **sensibilità** del test.

Definizione 8
La probabilità condizionata $P(\mathbf{Neg}|\mathbf{S})$ viene detta **specificità** del test.

Il test è tanto più sensibile quanto più è probabile che un malato risulti positivo, ed è tanto più specifico quanto più è probabile che un sano risulti negativo, ovvero che solo i malati risultino positivi. Pertanto un buon test è un test con sensibilità e specificità molto vicine a 1.

Valore predittivo del test

Supponiamo ora che il test venga effettivamente applicato per scoprire se una persona è malata o meno. Calcoliamo la probabilità che un individuo che risulta positivo al test sia effettivamente malato. Questa è una probabilità condizionata e si definisce nel modo seguente.

Definizione 9
La probabilità che un individuo che risulta positivo al test sia effettivamente malato $\boldsymbol{P}(\mathbf{M} \mid \mathbf{Pos})$ viene detta **valore predittivo** del test.

Per il teorema di Bayes il valore predittivo del test è

$$P(\mathrm{M} \mid \mathrm{Pos}) = \frac{P(\mathrm{Pos} \mid \mathrm{M}) \cdot P(\mathrm{M})}{P(\mathrm{Pos} \mid \mathrm{M}) \cdot P(\mathrm{M}) + P(\mathrm{Pos} \mid \mathrm{S}) \cdot P(\mathrm{S})}$$

Si può quindi notare che per calcolare il valore predittivo del test non basta conoscerne la sensibilità e la specificità, ma occorre conoscere anche la probabilità $P(\mathrm{M})$ con cui la malattia colpisce la popolazione complessiva.

Esempio (fare da soli il 69)

Esempio 68

Supponiamo che la probabilità che una persona abbia una certa malattia sia uguale a 0.03. La diagnosi della malattia viene fatta con un test che ha le seguenti caratteristiche: applicato a un individuo affetto dalla malattia dà risultato positivo con probabilità pari a 0.9; applicato a un individuo sano dà esito positivo con probabilità pari a 0.02.
Supponiamo che su un individuo il test abbia dato risultato positivo: qual è la probabilità che sia effettivamente malato?

Con le notazioni sopra suggerite si ha

$$P(\mathrm{M}) = 0.03 \qquad P(\mathrm{S}) = 1 - P(\mathrm{M}) = 0.97$$

$$P(\mathrm{Pos} \mid \mathrm{M}) = 0.9 \quad \text{(sensibilità)}$$

$$P(\mathrm{Pos} \mid \mathrm{S}) = 0.02$$

La probabilità che l'individuo sia malato, sapendo che il test è positivo, è il valore predittivo e si calcola con il teorema di Bayes

$$P(\mathrm{M} \mid \mathrm{Pos}) = \frac{P(\mathrm{Pos} \mid \mathrm{M}) \cdot P(\mathrm{M})}{P(\mathrm{Pos} \mid \mathrm{M}) \cdot P(\mathrm{M}) + P(\mathrm{Pos} \mid \mathrm{S}) \cdot P(\mathrm{S})} = \frac{0.9 \cdot 0.03}{0.9 \cdot 0.03 + 0.02 \cdot 0.97} = 0.582$$

… segue dall'esempio precedente

Supponiamo ora che il test abbia dato risultato negativo: qual è la probabilità che l'individuo sia sano?

Anche questa probabilità si calcola con il teorema di Bayes

$$P(\mathrm{S} \mid \mathrm{Neg}) = \frac{P(\mathrm{Neg} \mid \mathrm{S}) \cdot P(\mathrm{S})}{P(\mathrm{Neg} \mid \mathrm{S}) \cdot P(\mathrm{S}) + P(\mathrm{Neg} \mid \mathrm{M}) \cdot P(\mathrm{M})}$$

Osserviamo che

$$P(\mathrm{Neg} \mid \mathrm{S}) = 1 - P(\mathrm{Pos} \mid \mathrm{S}) = 1 - 0.02 = 0.98 \quad \text{(specificità)}$$

$$P(\mathrm{Neg} \mid \mathrm{M}) = 1 - P(\mathrm{Pos} \mid \mathrm{M}) = 1 - 0.9 = 0.1$$

Pertanto

$$P(\mathrm{S} \mid \mathrm{Neg}) = \frac{0.98 \cdot 0.97}{0.98 \cdot 0.97 + 0.1 \cdot 0.03} = 0.997$$

In conclusione, se il test è risultato negativo, abbiamo una probabilità molto alta che la persona sia sana, quindi il test è altamente predittivo negativamente, mentre non è molto predittivo in senso positivo (solo il 58% circa). In altre parole i falsi negativi sono pochissimi, mentre i falsi positivi sono piuttosto numerosi (il 42%).