Franco Ferraris
Marco Parvis

Generalità sulle Misure di Grandezze Fisiche

- Misurazioni indirette
- Esempi di stima di incertezze

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Testi consigliati

- Norma UNI 4546 - Misure e Misurazioni; termini e definizioni fondamentali - Milano - 1984
- Norma UNI-CEI 9 - Guida all'espressione dell'incertezza nella misurazione - Milano - 1997

  – UNI: Ente Nazionale Italiano di Unificazione
  CEI: Comitato Elettrotecnico Italiano

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Misurazioni indirette

Il misurando non è messo a confronto con una grandezza di riferimento della stessa specie (campione), ma

il valore del misurando e' ottenuto

elaborando i risultati di una o piu' misurazioni dirette

effettuate su grandezze ad esso collegate

Torino, 28-May-02 3

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Misurazioni indirette

- Esempi:
  - Velocità di un oggetto: misurazioni dirette di lunghezza e tempo
  - Densità di una sostanza: misurazioni dirette di massa e di volume
  - Volume di un solido sferico: misurazione diretta di lunghezza (diametro)
  - Resistenza di un resistore: misurazioni dirette di tensione e corrente

Torino, 28-May-02 4

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Misurazioni indirette

- La maggior parte delle misure è ottenu-ta in questo modo
- Motivazione della scelta: quasi sempre per ragioni di comodita' (costo,...)
  - Con riferimento agli esempi:
    - la densità potrebbe essere ottenuta anche con un densimetro
    - la resistenza potrebbe essere ottenuta per confronto con resistore campione

Torino, 28-May-02

5

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Misurazioni indirette

- La misurazione indiretta presuppone l'esistenza di un **modello**

$$n' = f(n_1, n_2, .. n_i ... n_m)$$

che lega le m misure n_i delle grandezze q_1, ...q_m alla misura n' della grandezza q'

- La presenza del **modello** implica una incertezza aggiuntiva "di modello": f(...) non descrive **adeguatamente** le relazioni nel mondo empirico

Torino, 28-May-02

6

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Misurazioni indirette

- Esempi:
  - Velocità: $v = l / t$
  - Densità: $\delta = m / V$
  - Volume: $V = \pi \cdot d^3 / 6$
  - Resistenza: $R = V / I$

Torino, 28-May-02 7

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Stima delle incertezze Modello deterministico

- Ipotesi:
  - Sono **definite e note** le incertezze δn_i delle misure dirette n_i

$$n_i = n_{io} \pm \delta n_i$$

  - Le grandezze q_i sono tutte **indipendenti**
  - Le incertezze δn_i sono **piccole** rispetto alle misure n_i
  - Sono definite e calcolabili le **derivate parziali prime** di f rispetto alle variabili indipendenti

Torino, 28-May-02 8

Franco Ferraris
Marco Parvis

Stima
Modello deterministico

- Il valore centrale n'_o da attribuire alla misura è dato da:

$$\boxed{n'_o = f(n_{1o}, n_{2o}, \ldots . n_{mo})}$$

  - con n_{io} valori centrali delle misure n_i

- L'incertezza massima $\delta n'$ da attribuire alla misura è data da:

$$\delta n' = \left|\frac{\partial f}{\partial n_1}\right|\delta n_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial n_2}\right|\delta n_2 + \ldots \left|\frac{\partial f}{\partial n_m}\right|\delta n_m$$

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Esempi (a > 0, b > 0)

- Somma

$$x = a + b$$
$$\delta x = E_x = \delta a + \delta b$$

- Differenza

$$x = a - b$$
$$\delta x = E_x = \delta a + \delta b$$

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Esempi

- Prodotto

$$x = a \cdot b$$

$$\frac{\delta x}{|x|} = \varepsilon_x = \frac{\delta a}{|a|} + \frac{\delta b}{|b|} = \varepsilon_a + \varepsilon_b$$

- Quoziente

$$x = \frac{a}{b}$$

$$\frac{\delta x}{|x|} = \varepsilon_x = \frac{\delta a}{|a|} + \frac{\delta b}{|b|} = \varepsilon_a + \varepsilon_b$$

Torino, 28-May-02 11

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Esempi

- Potenza

$$x = a^n$$

$$\frac{\delta x}{|x|} = \varepsilon_x = n \frac{\delta a}{|a|} = n \varepsilon_a$$

- Radice

$$x = \sqrt[n]{a}$$

$$\frac{\delta x}{|x|} = \varepsilon_x = \frac{1}{n} \frac{\delta a}{|a|} = \frac{\varepsilon_a}{n}$$

Torino, 28-May-02 12

Franco Ferraris
Marco Parvis

Esempi

- Piccolo incremento

$$x = a + \Delta; \left|\frac{\Delta}{a}\right| << 1$$

$$\frac{\delta x}{|x|} = \varepsilon_x = \frac{\delta a}{|a|} + \left|\frac{\Delta}{a}\right| \cdot \frac{\delta \Delta}{\Delta} = \varepsilon_a + \left|\frac{\Delta}{a}\right| \varepsilon_\Delta$$

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Modello probabilistico

- La stima n'_o da attribuire alla misura è data da:

$$\boxed{n'_o = f(n_{1o}, n_{2o}, ... n_{mo})}$$

– con n_{io} valori stimati delle misure n_i ottenute con le misurazioni dirette

Franco Ferraris
Marco Parvis

Stima delle incertezze modello probabilistico - I

- Ipotesi analoghe al caso deterministico:
  - Sono definite e note le **incertezze tipo** u_{n_i} delle misure dirette n_i
  - Le grandezze q_i sono tutte **statisticamente indipendenti**
  - Le incertezze tipo u_{n_i} sono **piccole** rispetto alle misure n_i
  - Sono definite e calcolabili le **derivate parziali prime** di f rispetto alle variabili indipendenti

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Stima modello probabilistico - I

- La **varianza composta $u^2_{n'}$** da attribuire alla misura è data da:

$$u^2_{n'} = \left(\frac{\partial f}{\partial n_1}\right)^2 u^2_{n_1} + \left(\frac{\partial f}{\partial n_2}\right)^2 u^2_{n_2} + \ldots \left(\frac{\partial f}{\partial n_m}\right)^2 u^2_{n_m}$$

- L'**incertezza tipo composta $u_{n'}$** è la radice quadrata positiva della varianza composta

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Stima delle incertezze modello probabilistico - II

- Se non vale l'ipotesi di non correla-zione:
  - Sono definite e note le incertezze tipo u_{n_i} delle misure dirette n_i
  - Le grandezze q_i sono **correlate**
  - Le incertezze tipo u_{n_i} sono piccole rispetto alle misure n_i
  - Sono definite e calcolabili le derivate parziali prime di f rispetto alle variabili indipendenti

Torino, 28-May-02 17

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Stima modello probabilistico - II

- La **varianza composta $u^2_{n'}$** da attribuire alla misura è data da:

$$u^2_{n'} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial n_i} \right)^2 u^2_{n_i} + 2 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+1}^{m-1} \frac{\partial f}{\partial n_i} \frac{\partial f}{\partial n_j} u_{n_i,n_j}$$

- dove u_{n_i,n_j} è la covarianza stimata associata a n_i e n_j

Torino, 28-May-02 18

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Stima
modello probabilistico - II

- Anche in questo caso:

L'**incertezza tipo composta $u_{n'}$** è la radice quadrata positiva della varianza composta

Torino, 28-May-02

19

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Stima
modello probabilistico - II

- La covarianza delle medie aritmetiche di due variabili aleatorie p e q è data da:

$$u_{p,q} = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{k=1}^{m} \left(p_k - \overline{p} \right)\left(q_k - \overline{q} \right)$$

Torino, 28-May-02

20

Franco Ferraris
Marco Parvis

Esempi (a > 0, b > 0, non correlati)

- Somma

$$x = a + b$$
$$u_x^2 = u_a^2 + u_b^2$$

- Differenza

$$x = a - b$$
$$u_x^2 = u_a^2 + u_b^2$$

Franco Ferraris
Marco Parvis

Esempi (non correlati)

- Prodotto

$$x = a \cdot b$$
$$\left(\frac{u_x}{x}\right)^2 = \left(\frac{u_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{u_b}{b}\right)^2$$

- Quoziente

$$x = \frac{a}{b}$$
$$\left(\frac{u_x}{x}\right)^2 = \left(\frac{u_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{u_b}{b}\right)^2$$

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Esempi

- Potenza $x = a^n$

. . . .

- Radice $x = \sqrt[n]{a}$

. . . .

Torino, 28-May-02

23

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Esempi

- Se tutte le stime d'ingresso sono correlate con coefficienti di correlazione $r_{n_i,n_j} = 1$

$$u_{n'}^2 = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial n_i} u_{n_i} \right)^2$$

- I coefficienti di correlazione sono definiti come:

$$r_{p,q} = \frac{u_{p,q}}{u_p \cdot u_q}$$

Torino, 28-May-02

24

Franco Ferraris
Marco Parvis

Misurazioni dirette e indirette

Un esempio:

misura di resistenza di un resistore

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Misurazione di resistenze
(modello deterministico dell'incertezza)

Si analizzano tre metodi:
- ohmetro
- metodo "volt-amperometrico"
- ponte di Wheatstone

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Ohmetro

Metodo di misurazione in cui lo strumento fornisce direttamente la misura.

Prestazioni metrologiche definite da:

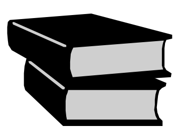
- Caratteristiche dello strumento
- Grandezze di influenza
- Incertezza intrinseca del misurando
  (effetto della temperatura, resistenze di contatto, ecc.)

L’incertezza intrinseca del misurando sarà discussa una sola volta parlando del ponte di Wheatstone

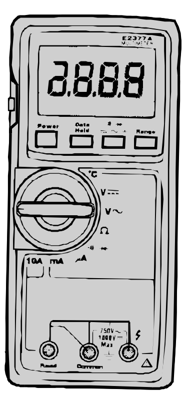
Torino, 28-May-02 27

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis



Ohmetro
Caratteristiche strumento

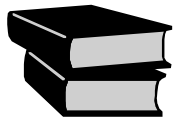


Le prestazioni dello strumento ricavate dal **manuale** sono diverse in base alla portata impiegata:

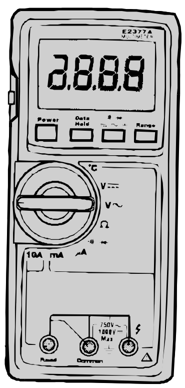
Portata	Incertezza
300 Ω	0.7%+2 count
3kΩ - 3MΩ	0.7%+1 count
30MΩ	2%+1 count

Torino, 28-May-02 28

Franco Ferraris
Marco Parvis



Ohmetro
Grandezze influenza



Il campo d'impiego delle grandezze di influenza per il corretto funziona-mento dello strumento è letto sul **manuale**; ad esempio:

- temperatura: **25±5 °C**
- tempo dalla taratura: **1 anno**

Si ipotizza che la misurazione sia eseguita all'interno del campo d'impiego

Franco Ferraris
Marco Parvis

Ohmetro

La formula dell'incertezza è binomia e quindi **incertezze relative inferiori si hanno vicino al fondo scala**

Esempi (L é la lettura):

$$R = 2900\Omega \Rightarrow L = 2900 \Rightarrow$$

$$E_R = 2900 \cdot 0.007 + 1 = 21.3\Omega \Rightarrow \varepsilon_R = \frac{21.3}{2900} \approx 0.0074 \approx 0.7\%$$

$$R = 3100\Omega \Rightarrow L = 310 \Rightarrow$$

$$E_R = 10 \cdot (310 \cdot 0.007 + 1) = 31.7\Omega \Rightarrow \varepsilon_R = \frac{31.7}{3100} \approx 0.01 \approx 1\%$$

Franco Ferraris
Marco Parvis

Metodo “volt-amperometrico”

Metodo di misurazione **indiretto** in cui il valore di resistenza è ottenuto come:

$$R = \frac{V}{I}$$

a partire dalle **misurazioni dirette** di un voltmetro ed un amperometro.

Franco Ferraris
Marco Parvis

Metodo “volt-amperometrico”

Prestazioni metrologiche definite da:

- Caratteristiche degli strumenti, grandezze di influenza e composizione delle incertezze
- Incertezza intrinseca del misurando (effetto della temperatura, resistenze di contatto, ecc.)
- Tipo di circuito impiegato per la misurazione: voltmetro “a monte” oppure voltmetro “a valle” (problema del carico strumentale o “consumo”)

Franco Ferraris
Marco Parvis

Metodo “volt-amperometrico”

Misurazione indiretta: si sommano le incertezze relative degli strumenti :

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow \varepsilon_R = \varepsilon_V + \varepsilon_I$$

Esempio: strumenti elettromeccanici in classe 1

$$\begin{cases} V_{FS} = 100V & \delta V = 1V & V = 80V \\ I_{FS} = 10A & \delta I = 0.1A & I = 4A \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \varepsilon_V = 1.25\% \\ \varepsilon_I = 2.5\% \end{matrix}$$

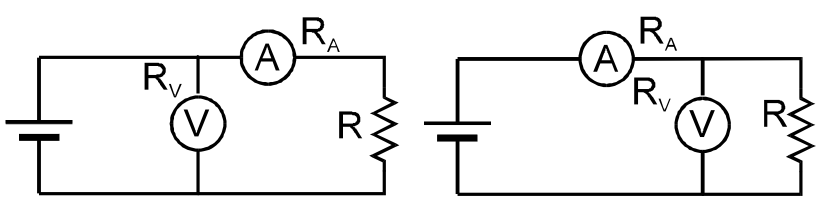
$$R = \frac{V}{I} = 20\Omega;\ \varepsilon_R = 3.75\%$$

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Metodo “volt-amperometrico”

Gli strumenti non sono “ideali”

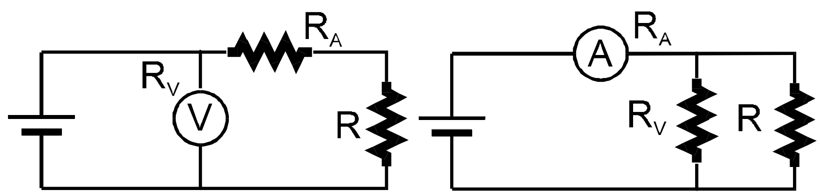


- L’amperometro ha una resistenza interna R_A **non nulla**
- Il voltmetro ha una resistenza interna R_V **non infinita**

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Metodo “volt-amperometrico”



Voltmetro a monte: si misura $\mathbf{R+R_A}$

Voltmetro a valle: si misura $\mathbf{R//R_V}$

Torino, 28-May-02 35

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Metodo “volt-amperometrico”

Il “consumo” può essere uno scostamento perché:

- può essere descritto da un **modello** e quindi può essere **corretto**
- la correzione non può **essere totale**, perché i valori del carico strumentale sono affetti da incertezza
- **e quindi** conviene cercare prima di tutto la condizione operativa in cui l’effetto del carico strumentale è minore

Torino, 28-May-02 36

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Il ponte di Wheatstone

Metodo di misurazione in cui il valore di resistenza è ottenuto per “confronto” del resistore incognito con resistori campione

Il confronto si effettua ricercando un equilibrio di tensioni, cioè la misura nulla di una tensione “a vuoto”

Torino, 28-May-02

37

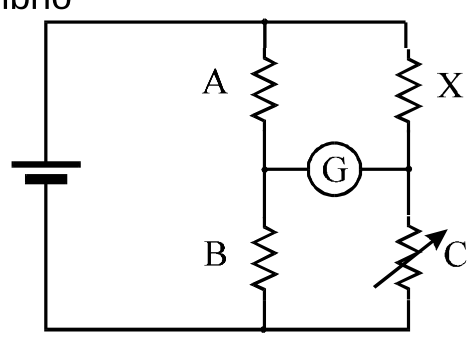
MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Il ponte di Wheatstone

Si modifica il campione C fino a che il galvano-metro G indica equilibrio

$$R_X = \frac{R_A}{R_B} R_C$$



- R_X: misurando
- R_A/R_B: trasduttore “comandato”

Torino, 28-May-02

38

Franco Ferraris
Marco Parvis

Il ponte di Wheatstone

Prestazioni metrologiche definite da:

- Caratteristiche dei resistori impiegati
- Grandezze di influenza
- Risoluzione del galvanometro
- Fenomeni secondari (forze termoelettromotrici, resistenze di contatto,...)
- Incertezza intrinseca del misurando (effetto della temperatura, resistenze di contatto, ecc.)

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Il ponte di Wheatstone

L'incertezza su R_X relativa ai **resistori impiegati** si ottiene con le regole di composizione delle incertezze:

$$R_X = \frac{R_A}{R_B} R_C \Rightarrow \varepsilon_{R_X} = \varepsilon_{R_A} + \varepsilon_{R_B} + \varepsilon_{R_C} + \varepsilon_{\delta_i}$$

Note:

- I termini ε_{δ_i} rappresentano gli effetti secondari di cui si tiene conto nel calcolo delle incertezze
- Nel calcolo delle incertezze ε si è tenuto conto delle **grandezze di influenza** (temperatura, tempo, ...)

Franco Ferraris
Marco Parvis

Il ponte di Wheatstone

L'incertezza σ_X dovuta al **galvanometro** si determina sperimentalmente squilibrando leggermente il ponte

$$\sigma_X = \frac{\Delta R_X \;/\; R_X}{\Delta e \;/\; \delta e} \quad \text{dove} \begin{cases} R_X & \text{valore di equilibrio di X} \\ \Delta R_X & \text{variazione intorno all'equilibrio} \\ \Delta e & \text{deviazione prodotta da } \Delta R_X \\ \delta e & \text{minima deviazione apprezzabile} \end{cases}$$

Franco Ferraris
Marco Parvis

Il ponte di Wheatstone

- L'incertezza stimata finora è dunque composta dai termini:

$$\varepsilon_{R_X} = \varepsilon_{R_A} + \varepsilon_{R_B} + \varepsilon_{R_C} + \sigma_X + \ldots$$

Franco Ferraris
Marco Parvis

Il ponte di Wheatstone

- L'incertezza dovuta ad alcuni **effetti secondari** si può valutare con prove "ad hoc".
- I principali effetti secondari sono:
  - le forze termoelettromotrici (FTEM)
  - le resistenze di contatto.
- Questi effetti secondari sono:
  - **correggibili** con opportuni modelli
  - **riducibili** con opportuni procedimenti

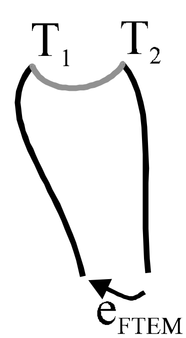
MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Il ponte di Wheatstone

Una **FTEM** è una tensione che si genera quando:

- Esiste una giunzione tra **materiali diversi**
- Esiste una **differenza di temperatura** tra i punti del circuito.



$$e_{FTEM} = f\left(T_1 - T_2\right) \approx \alpha\left(T_1 - T_2\right) + \beta\left(T_1 - T_2\right)^2 + ..$$

$$\alpha \approx 5 \div 50 \mu V / K; \beta \approx 0$$

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Il ponte di Wheatstone

L'effetto delle FTEM:

- Si **minimizza** equalizzando termicamente il circuito
- Si rende **sufficientemente piccolo** eseguendo due misure prima e dopo aver invertito l'ali-mentazione del ponte (le FTEM, che dipendono dalla temperatura, non si invertono)

Torino, 28-May-02 45

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Il ponte di Wheatstone

La **resistenza di contatto** è quella resistenza che si genera ove esiste un contatto mobile tra due conduttori.

Le resistenze di contatto sono causa di problemi perché:

- Il valore **varia** ogni volta che si fa il contatto
- Si tratta di resistenze non note che si pongono **in serie** ai diversi elementi e ne alterano il valore

Torino, 28-May-02 46

MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Il ponte di Wheatstone

Le resistenze di contatto sono dell'ordine dei centesimi di ohm. Il loro effetto relativo é tanto più elevato quanto più sono bassi i valori di resistenza coinvolti

Torino, 28-May-02

47

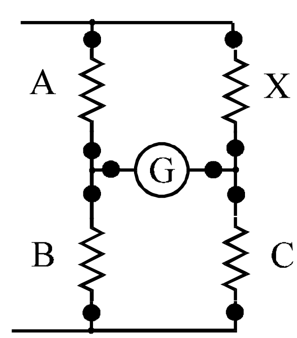
MISELN-GEN-04

Franco Ferraris
Marco Parvis

Il ponte di Wheatstone

I contatti sono due per ogni oggetto, cioè dieci in un ponte

Ogni contatto si può modellizzare con una resistenza



Torino, 28-May-02

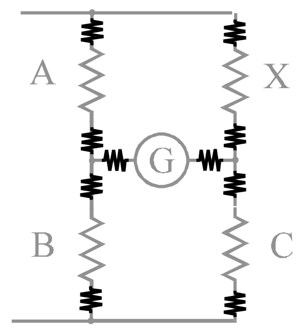
48

Franco Ferraris
Marco Parvis

Il ponte di Wheatstone

L'effetto delle resistenze di contatto può essere diminuito operando (se possibile) con resistori A, B e C di elevato valore

NOTA: esistono confi-gurazioni circuitali per "eliminare" l'effetto di alcune resistenze di contatto, ma NON di tutte

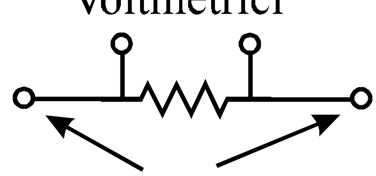


Franco Ferraris
Marco Parvis

Le resistenze di contatto

- Soluzione: prelevare la tensione che definisce la resistenza in modo indipendente dall'ad-duzione della corrente

Si costruisce il resistore con quattro morsetti: due destinati all'adduzione della corrente (amperome-trici) e due destinati al prelievo della tensione (voltmetrici)

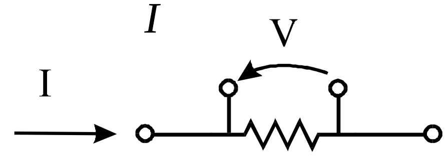


Franco Ferraris
Marco Parvis

Le resistenze di contatto

La resistenza del doppio bipolo è ora definita come rapporto tra la corrente I ai morsetti amperometrici e la tensione V tra i morsetti voltmetrici

$$R = \frac{V}{I}$$



Franco Ferraris
Marco Parvis

Le resistenze di contatto

Le resistenze di contatto ora non influenzano né la definizione, né la misurazione di R.